Тема: Позиционные системы счисления

Позиционная система счисления – это такая система, в которой значение цифры полностью определяется ее местом (позицией) в записи числа.

Пример позиционной системы счисления – привычная нам десятичная система. В числе 6375 цифра 6 обозначает тысячи (то есть 6000), цифра 3 – сотни (300), цифра 7 – десятки (70), а цифра 5 – единицы:

$$6375 = 6 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 5 \cdot 1$$

Алфавит – это набор цифр, используемых в системе счисления.
Основание – это количество цифр в алфавите (мощность алфавита).

В десятичной системе основание – 10, используется *алфавит* из 10 цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Число 10, вероятно, было выбрано потому, что люди сначала использовали для счета свои 10 пальцев на руках.

Разряд – это позиция цифры в записи числа. Разряды в записи целых чисел нумеруются с нуля справа налево.

В числе 6375 цифра 6 стоит в третьем разряде (тысячи, 10^3), 3 – во втором разряде (сотни, 10^2), 7 – в первом (десятки, 10^1), а 5 – в нулевом (единицы, 10^0). Не забывайте, что любое число (кроме нуля!) в нулевой степени равно 1. Поэтому

$$\begin{matrix} \textit{разряды} \rightarrow & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 6375 & = 6 \cdot 10^3 & + 3 \cdot 10^2 & + 7 \cdot 10^1 & + 5 \cdot 10^0 \end{matrix}$$

Это так называемая *развернутая форма* записи числа. Из этой записи видно, что последняя цифра 5 – это остаток от деления числа на 10 (все остальные слагаемые делятся на 10); число, составленное из двух последних цифр (75) – это остаток от деления исходного числа на $100 = 10^2$ и т.д. Поэтому все числа, делящиеся на 100 без остатка, оканчиваются на два нуля.

Правило перевода из любой произвольной системы счисления в десятичную: значение каждой цифры умножается на основание системы счисления в степени, равной разряду, затем полученные величины складываются.

Пример записать:

Через развёрнутую запись:

разряды: 3 2 1 0

$$1234_5 = 1 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 194$$

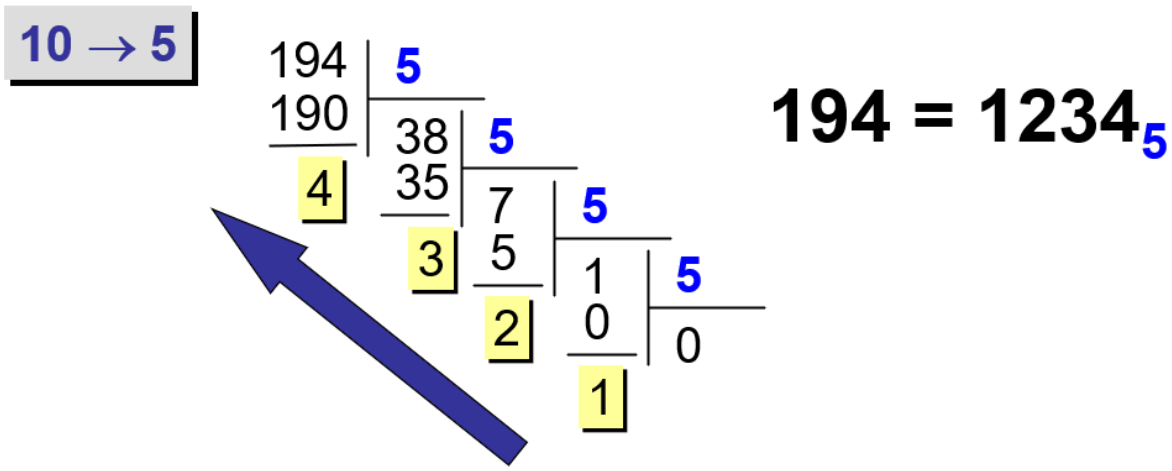
=1

основание системы счисления

Правило перевода из десятичной системы счисления в любую другую:

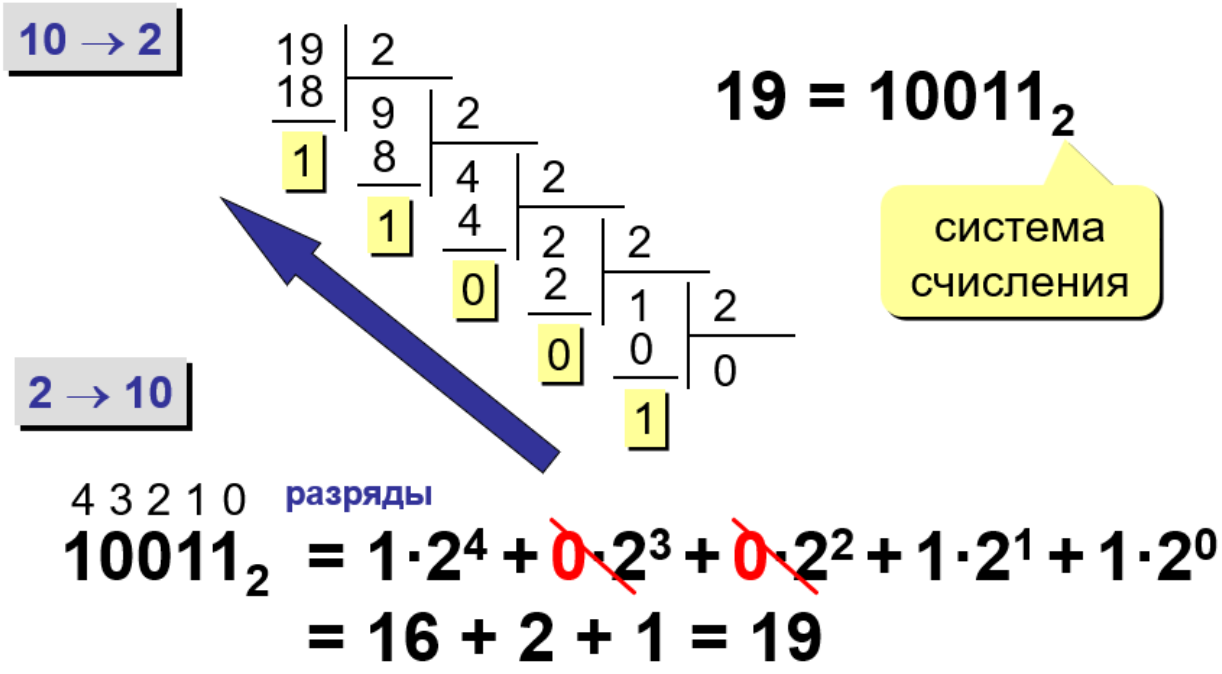
Делим число на основание системы счисления (в которую хотим перевести, отбрасывая остаток на каждом шаге, пока не получится 0. Затем надо выписать найденные остатки в обратном порядке.

Пример записать:



Двоичная система счисления

В двоичной системе счисления, то есть в системе с основанием 2, алфавит состоит из двух цифр: 0 и 1. Вся числовая информация в компьютерных устройствах хранится и обрабатывается в двоичной системе счисления.



Арифметические операции в двоичной системе счисления (очень важно!)

Двоичные числа, как и десятичные, можно складывать в столбик, начиная с младшего разряда (без перехода к десятичной системе). При этом используют следующие правила:

$0 + 0 = 0, \quad 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 10_2, \quad 1 + 1 + 1 = 11_2.$

В двух последних случаях, когда получается сумма $2 = 10_2$ или $3 = 11_2$, происходит перенос в следующий разряд.

Например, сложим в столбик 10110_2 и 111011_2. Единицы сверху обозначают перенос из предыдущего разряда:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle 1\,1\,1\,1\,1} \\ 10110_2 \\ +\ 111011_2 \\ \hline 1010001_2 \end{array}$$

Вычитание выполняется почти так же, как и в десятичной системе. Вот основные правила:

$$0 - 0 = 0, \quad 1 - 0 = 1, \quad 1 - 1 = 0, \quad 10_2 - 1 = 1.$$

В последнем случае приходится брать заем из предыдущего разряда. Именно этот вариант представляет наибольшие сложности, поэтому мы рассмотрим его подробно.

Чтобы понять принцип, временно вернемся к десятичной системе. Вычтем в столбик из числа 21 число 9:

$$\begin{array}{r} 21 \\ -\ 9 \\ \hline ? \end{array}$$

Поскольку из 1 нельзя вычесть 9, нужно взять заем из предыдущего разряда, в котором стоит 2. В результате к младшему разряду добавляется 10, а в следующем 2 уменьшается до 1. Теперь можно выполнить вычитание: 1 + 10 – 9 = 2. В старшем разряде вычитаем из оставшейся единицы ноль:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle \bullet\quad\quad} \\ {\scriptstyle 1\,10} \\ 21 \\ -\ 9 \\ \hline 12 \end{array}$$

Здесь точкой сверху обозначен разряд, из которого берется заем.

Более сложный случай – заем из дальнего (не ближайшего) разряда. Вычтем 9 из 2001. В этом случае занять из ближайшего разряда не удается (там 0), поэтому берем заем из того разряда, где стоит цифра 2. Все промежуточные разряды в результате заполняются цифрой 9, это старшая цифра десятичной системы счисления:

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle \bullet\quad\quad\quad} \\ {\scriptstyle 1\,9\,9\,10} \\ 2001 \\ -\ 9 \\ \hline 1992 \end{array}$$

Что изменится в двоичной системе? Когда берется заем, в «рабочий» разряд добавляется уже не 10, а $10_2 = 2$ (основание системы счисления), а все «промежуточные» разряды (между «рабочим» и тем, откуда берется заем) заполняются не девятками, а единицами (старшей цифрой системы счисления). Например,

$$\begin{array}{r} {\scriptstyle \bullet\quad\quad\quad} \\ {\scriptstyle 0\,0\,1\,1\,2} \\ 10000_2 \\ -\ 1_2 \\ \hline 10111_2 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} {\scriptstyle \bullet\quad\quad\quad\quad\bullet} \\ {\scriptstyle 0\,1\,1\,2\,0\,2} \\ 100001_2 \\ -\ 11011_2 \\ \hline 101010_2 \end{array}$$

Двоичная система служит основой всех расчетов в современных компьютерах. Она обладает следующими **преимуществами**:

- для того, чтобы построить компьютер, работающий с двоичными данными, достаточно иметь **устройства с двумя состояниями** (включено-выключено); первыми такими устройствами были электромагнитные реле, сейчас применяются микроэлектронные элементы;
- **надежность и защита от помех** при передаче информации (для приема двоичного кода не нужно измерять сигнал, а надо только определять есть он или нет);
- компьютеру **проще выполнять вычисления** с двоичными числами, нежели с десятичными; например, умножение фактически сводится к многократному сложению, а деление – к вычитанию.

Тем не менее, с точки зрения человека у двоичной системы есть **недостатки**:

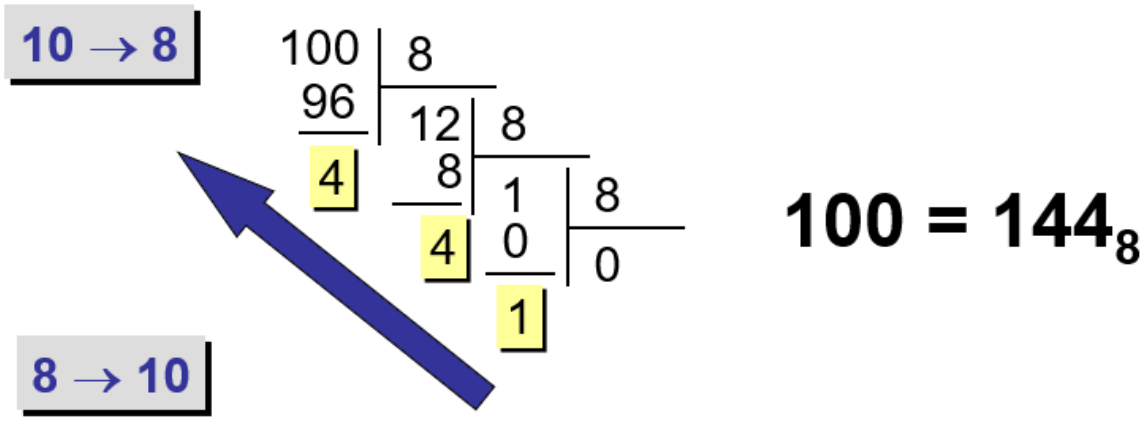
- двоичная запись чисел получается **длинная**: например, число 1024 записывается в виде 10000000000_2 – здесь легко перепутать количество идущих подряд нулей;
- запись **однородна**, то есть содержит только нули и единицы; поэтому при работе с двоичными числами легко ошибиться или запутаться.

Восьмеричная система счисления

Восьмеричная система (система с основанием 8) использовалась для кодирования команд во многих компьютерах 1950-1980-х годов (например, в американской серии PDP-11, советских компьютерах серий ДВК, СМ ЭВМ, БЭСМ).

Основание: **8**

Алфавит: **0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7**



2 1 0 разряды

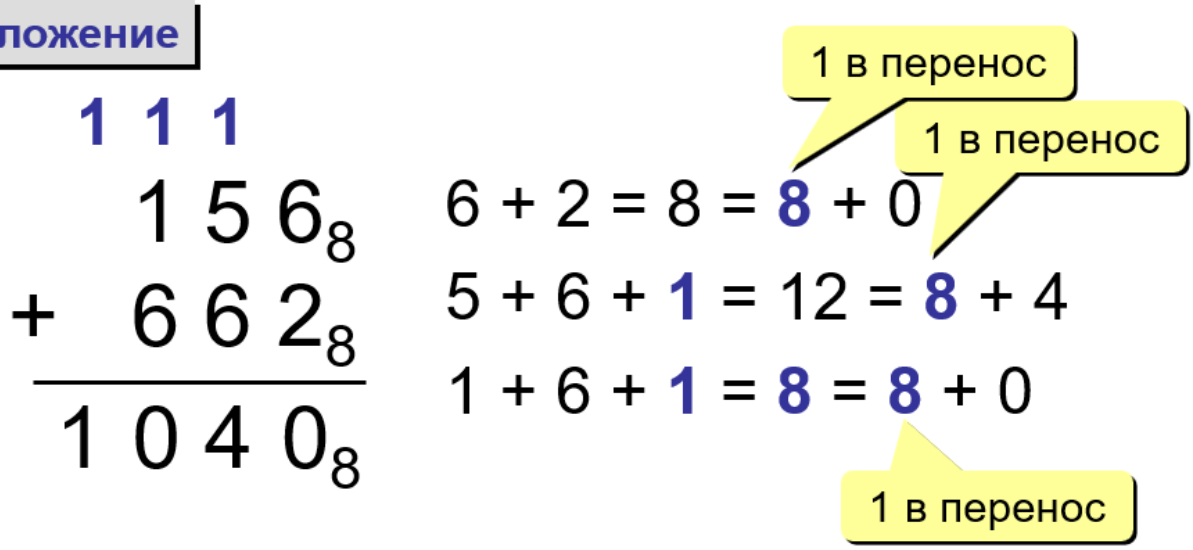
$$144_8 = 1 \cdot 8^2 + 4 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0$$
$$= 64 + 32 + 4 = 100$$

Арифметические операции

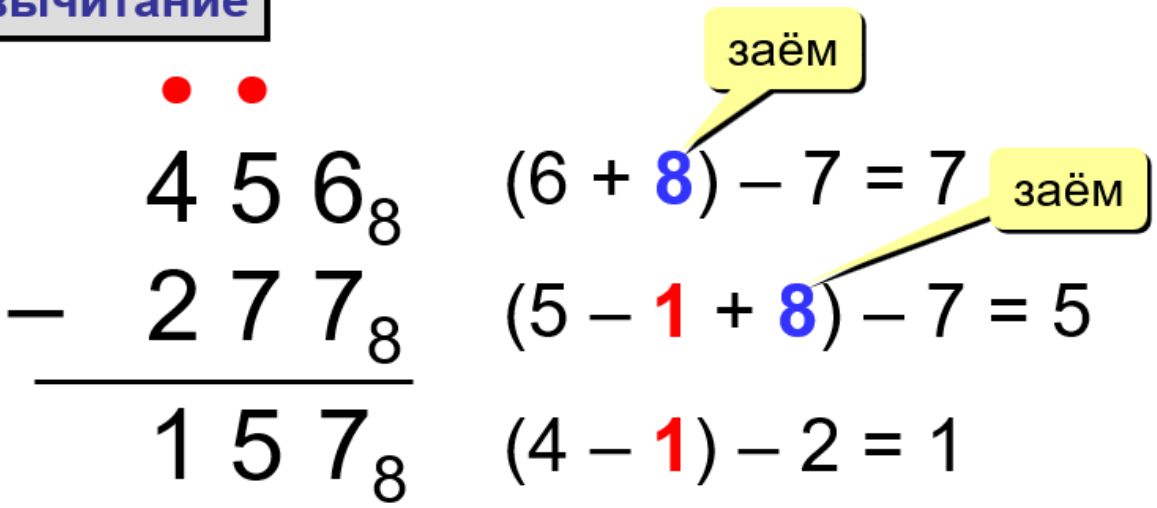
При вычислениях в восьмеричной системе нужно помнить, что максимальная цифра – это 7. Перенос при сложении возникает тогда, когда сумма в очередном разряде получается больше 7. Заем из старшего разряда равен $10_8 = 8$, а все «промежуточные» разряды заполняются цифрой 7 – старшей цифрой системы счисления. Приведем примеры сложения и вычитания (записать):

Арифметические операции

сложение



вычитание



В примере на сложение запись 8 + 4 означает, что получилась сумма, большая 7, которая не помещается в один разряд. Единица идет в перенос, а четвёрка остается в этом разряде. При вычитании «–1» означает, что из этого разряда раньше был заем (его значение уменьшилось на 1), а «+8» – заем из следующего разряда.

Шестнадцатеричная система счисления

Шестнадцатеричная система (позиционная система с основанием 16) широко используется для записи адресов и содержимого ячеек памяти компьютера. Ее алфавит содержит 16 цифр, вместе с 10 арабскими цифрами (0...9) используются первые буквы латинского алфавита:

A = 10, B = 11, C = 12, D = 13, E = 14 и F = 15.

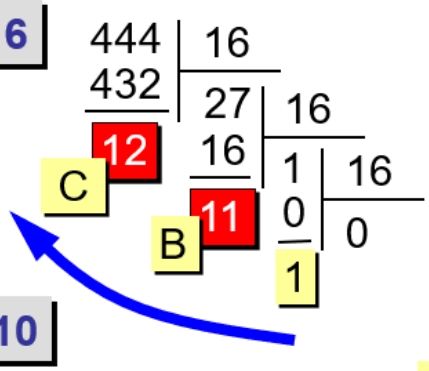
Таким образом, старшая цифра – F.

Основание: **16**

Алфавит: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, **A**, **B**, **C**, **D**, **E**, **F**

10 11 12 13 14 15

10 → 16



$$444 = 1BC_{16}$$

16 → 10

2 1 0 **разряды**

$$1BC_{16} = 1\cdot16^2 + \overset{B}{11}\cdot16^1 + \overset{C}{12}\cdot16^0$$

$$= 256 + 176 + 12 = 444$$

Арифметические операции

При выполнении сложения нужно помнить, что в системе с основанием 16 перенос появляется тогда, когда сумма в очередном разряде превышает 15. Удобно сначала переписать исходные числа, заменив все буквы на их численные значения:

сложение

$$\begin{array}{r} A\,5\,B_{16} \\ +\quad C\,7\,E_{16} \\ \hline 1\,6\,D\,9_{16} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 1 & \\ & 10 & 5 & 11 \\ + & 12 & 7 & 14 \\ \hline & 1 & 6 & 13 & 9 \end{array}$$

1 в перенос

$11+14=25=16+9$

$5+7+1=13=D_{16}$

1 в перенос

$10+12=22=16+6$

При вычитании заем из старшего разряда равен 10_{16} = 16, а все «промежуточные» разряды заполняются цифрой F – старшей цифрой системы счисления.

