

# Олимпиадное программирование

## Лекция : Геометрия - 1

Дьулустан Никифоров

Кафедра ИТ  
Северо-Восточный Федеральный Университет

Весна 2023

- **Вычислительная геометрия** — область Computer Science и Competitive Programming, в котором моделируются геометрические объекты на координатной плоскости или пространстве.
- Задачи на геометрию встречаются сравнительно редко, НО встречаются.
- Решать задачи на геометрию обычно неприятно: большинство задач сводится не к алгоритму, а к выведению формул на бумаге и кропотливому разбору миллиона различных случаев.
- Редкость геометрии + множество уравнений и формул в геометрии = жуть.

Поэтому, мы сейчас интуитивно построим геометрию, основываясь только на нескольких понятиях и формулах  $\Rightarrow$  чтобы потом более надежно и менее болезненно воспроизвести их на олимпиадах.

# Точка и вектор

Все живет на **координатной плоскости**:

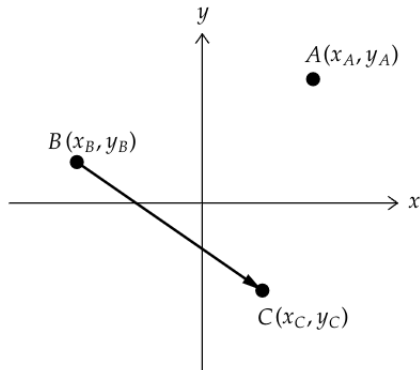
- Горизонтальная ось  $x$ .
- Вертикальная ось  $y$ .
- Оси  $x$  и  $y$  пересекаются в начале координат.

Самый базовый объект: **точка**.

Любая точка  $\rightarrow$  пара координат  $(x, y)$ .

Другой базовый объект: **вектор** — это *направленный* отрезок на плоскости.

# Точка и вектор



Видим три точки  $A, B, C$  и вектор  $\overrightarrow{BC}$ .

$$B(x_B, y_B), C(x_C, y_C) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (x_C - x_B, y_C - y_B).$$

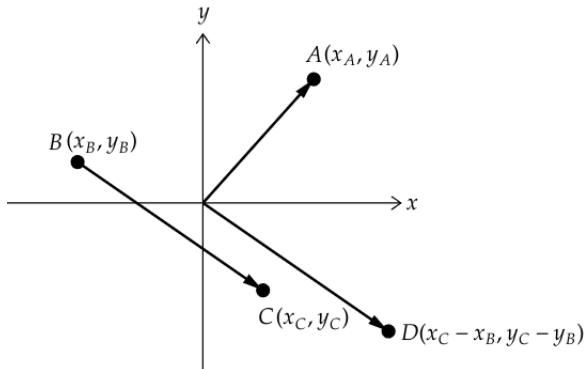
# Точка и вектор

- (!) Мы смотрим на векторы, не как на направленные отрезки с фиксированными концами, а как на свободно перемещающиеся направленные отрезки.

Т.е.  $\overrightarrow{BC}$  — это также вектор, отложенный от начала координат к точке  $D = (x_C - x_B, y_C - y_B)$ .

- Приняв это, осознаем, что точки — это тоже вектора! И точка, и вектор задаются ровно двумя числами  $(x, y) \Rightarrow$  далее считаем их практически одинаковыми видами объектов (в зависимости от контекста, все равно будем говорить точкам или вектор).
- Главная идея нашего метода — сводить всё к векторам! Потому что мы очень хорошо научимся делать с векторами все, что захотим.

# Точка и вектор



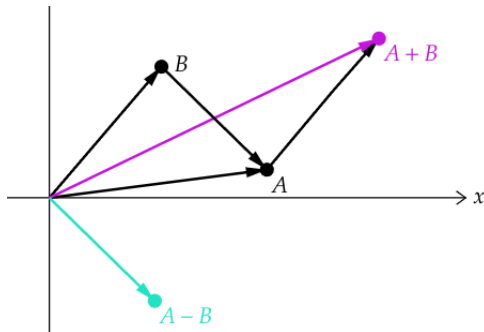
# Операции с векторами

Два вектора можно сложить:

$$\vec{A}(x_A, y_A) + \vec{B}(x_B, y_B) = \vec{C}(x_A + x_B, y_A + y_B)$$

От вектора можно вычесть вектор:

$$\vec{A}(x_A, y_A) - \vec{B}(x_B, y_B) = \vec{D}(x_A - x_B, y_A - y_B).$$



# Операции с векторами

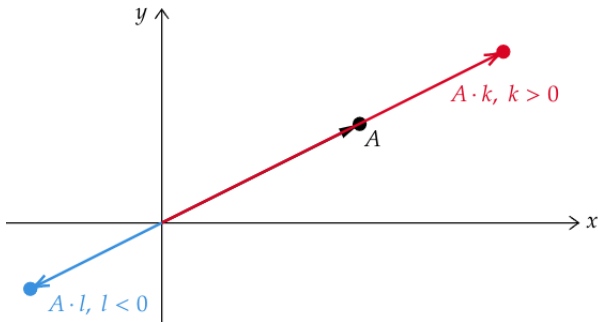
- Чтобы отложить от точки  $P$  вектор  $Q$ , надо прибавить  $P + Q$ .
- Чтобы провести вектор от  $P$  к  $Q$ , надо вычесть  $Q - P$ .

Вот почему  $\Rightarrow$  вектора — это cool!



# Операции с векторами

Вектор можно умножить или разделить на скаляр:

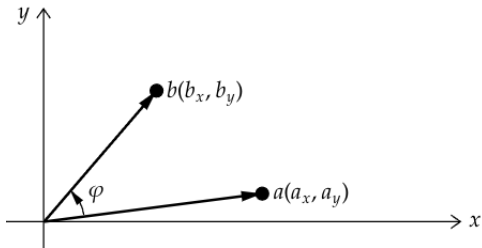


Еще вектора можно перемножать между собой. Но тут есть два разных способа сделать это:

- скалярное произведение / dot product  $a \cdot b$
- векторное произведение / cross product  $a \times b$

Но перед этим, рассмотрим еще одно базовое понятие — **угол между векторами**.

В отличие от простых углов, угол между двумя векторами тоже направлен!

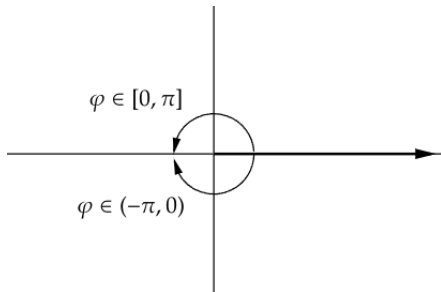


Угол всегда проводится от одного вектора к другому. Но всегда есть два способа сделать это  $\Rightarrow$  договоримся, что угол всегда идет «кратчайшим путем», т.е. из двух возможных вариантов берем меньший из них.

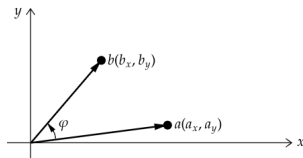
Когда вектора коллинеарны и противоположны по направлению: угол между ними можно взять как  $\pi$  или как  $-\pi$  — договоримся считать  $\pi$ .

Тогда любой угол  $\varphi \in (-\pi; \pi]$ .

# Углы



# Скалярное произведение

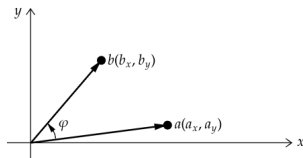


dot product:

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$$

- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow \varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$  — острый угол.
- $a \cdot b < 0 \Leftrightarrow \varphi \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$  — тупой угол.
- $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow \varphi = \pm\pi/2$  — прямой угол.

# Векторное произведение

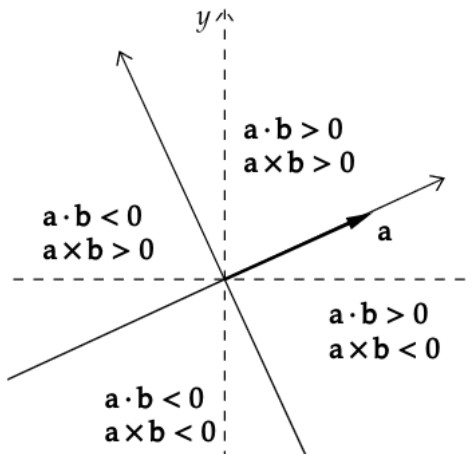


cross product:

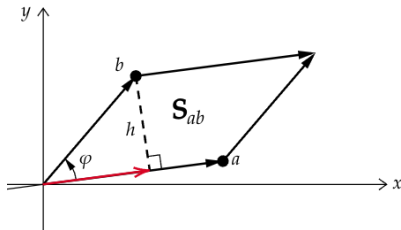
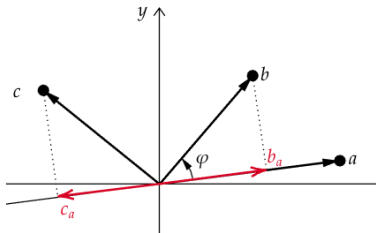
$$a \times b = a_x b_y - a_y b_x = |a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$$

- $a \times b = -b \times a$
- $a \times b > 0 \Leftrightarrow \varphi \in (0, \pi) : b \text{ «левее» } a.$
- $a \times b < 0 \Leftrightarrow \varphi \in (-\pi, 0) : a \text{ «левее» } b.$
- $a \times b = 0 \Leftrightarrow \varphi = 0 \text{ или } \varphi = \pi : a \text{ и } b \text{ коллинеарны.}$

# Скалярное и Векторное произведения



# Геометрический смысл



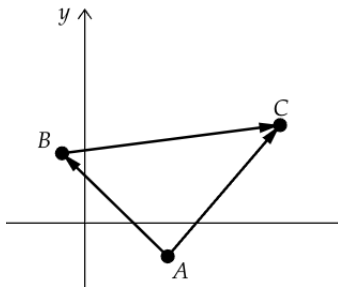
$$a \cdot b = \begin{cases} |a| \cdot |b_a|, & \text{если острый угол} \\ -|a| \cdot |b_a|, & \text{если тупой угол} \end{cases}$$

$$a \times b = \begin{cases} S_{ab}, & \text{если } \angle(a, b) > 0 \\ -S_{ab}, & \text{если } \angle(a, b) < 0 \end{cases}$$

$S_{ab}$  — площадь параллелограмма на  $a, b$ .



# Геометрический смысл



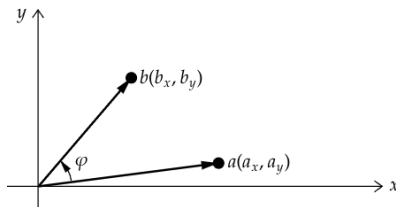
Длина отрезка  $AB$ :

$$|AB| = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2} = \sqrt{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}$$

Площадь треугольника  $ABC$ :

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$$

# Вычисление угла



$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$$

$$a \times b = |a| \cdot |b| \cdot \sin \varphi$$

$$\tan \varphi = \frac{a \times b}{a \cdot b} = \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_x b_x + a_y b_y}$$

В C++ в директиве `cmath` есть функция `atan2(x,y)`, которая возвращает число из  $(-\pi, \pi]$ , тангенс которого равен  $\frac{x}{y}$ .

Реализуем векторы как структуры:

```
struct Vec{
    ll x, y;
    Vec() : x(0), y(0) {}
    Vec(ll _x, ll _y) : x(_x), y(_y) {}
    Vec operator+(Vec &v){return {x + v.x, y + v.y};}
    Vec operator-(Vec &v){return {x - v.x, y - v.y};}
    Vec operator*(ll k){return {x * k, y * k};}
    Vec operator/(ll k){return {x / k, y / k};}
    ll operator*(Vec &v) {return x * v.x + y * v.y;}
    ll operator^(Vec &v) {return x * v.y - y * v.x;}
    void in(){cin >> x >> y;}
    void out(){cout << x << ' ' << y << "\n";}
};
```

Альтернативно, скалярное и векторное произведения реализовать через функции (я даже предпочитаю так делать):

```
11 dot(Vec &a, Vec &b){  
    return a.x * b.x + a.y * b.y;  
}  
11 cross(Vec &a, Vec &b){  
    return a.x * b.y - a.y * b.x;  
}
```

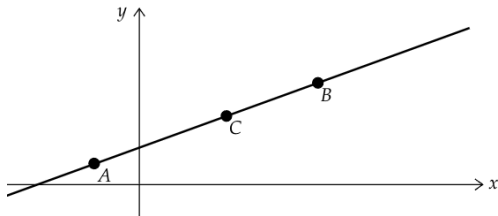
Функция вычисления угла между двумя векторами:

```
long double angle(Vec &a, Vec &b){  
    return atan2(a*b, a^b);  
}
```

# Целые vs вещественные числа

- Если в задаче все точки входных данных целочисленные (обычно так и бывает)  $\Rightarrow$  вектора, соединяющие эти точки будут целочисленными и dot/cross произведения этих векторов всегда будут целые числа.
- В зависимости от ситуации, можно обойтись только целыми числами  $\Rightarrow$  если возможно, то так и следует делать, чтобы точно не возникло проблем из-за погрешности вычислений вещественных чисел.
- Но иногда надо именно в вещественных числах работать  $\Rightarrow$  тогда заменяем `long long` в нашей структуре на `long double` и вперёд!

# Принадлежность точки прямой

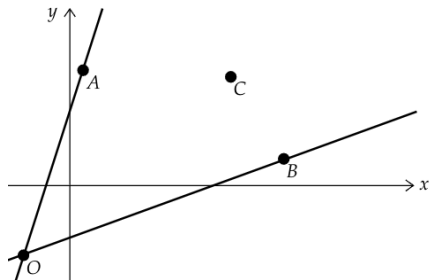


Пусть даны точки  $A, B, C$ .

Тогда:

- $C$  лежит на прямой через  $AB \Leftrightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = 0$ .
- $C$  лежит на луче  $AB \Leftrightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = 0$  и  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} \geq 0$ .
- $C$  лежит на отрезке  $AB \Leftrightarrow \vec{AB} \times \vec{AC} = 0$  и  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} \geq 0$  и  $\vec{BA} \cdot \vec{BC} \geq 0$ .

# Принадлежность точки углу



Пусть даны точки  $O, A, B, C$ .

Точка  $C$  принадлежит углу  $AOB \Leftrightarrow$   
 $\text{sign}(\vec{OA} \times \vec{OB}) = \text{sign}(\vec{OA} \times \vec{OC})$  и  
 $\text{sign}(\vec{OB} \times \vec{OA}) = \text{sign}(\vec{OB} \times \vec{OC})$

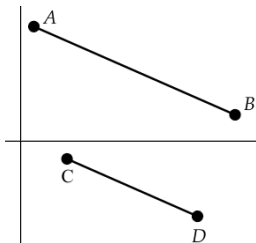
# Проверка пересечения отрезков

**Задача:** Пусть даны четыре точки  $A, B, C, D$ . Определить, пересекаются ли отрезки  $AB$  и  $CD$ .

**Решение:** Надо аккуратно рассмотреть всевозможные случаи.

*Случай 1:* Если  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow$  параллельные отрезки.

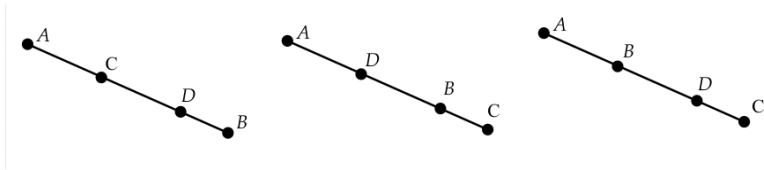
*Случай 1A:* Если  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \neq 0 \Rightarrow$  отрезки не на одной прямой  $\Rightarrow$  NO.





# Проверка пересечения отрезков

Случай 1B: Если  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow$  отрезки лежат на одной прямой.



$AB$  и  $CD$  пересекаются  $\Leftrightarrow$  хотя бы одна точка одного из отрезков содержится внутри другого отрезка.

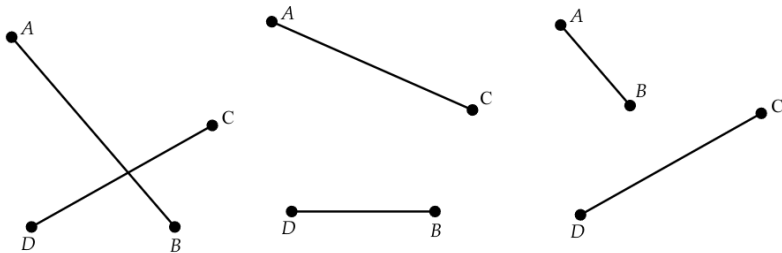
Надо проверить это условие:

$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} \leq 0$  или  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} \leq 0$  или  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{DC} \leq 0$   
или  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DB} \leq 0$ .

(!) Достаточно проверить только три из них, но ничего страшного проверить все четыре.

# Проверка пересечения отрезков

Случай 2: Если  $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CD} \neq 0 \Rightarrow$  прямые  $AB$  и  $CD$  пересекаются.



$AB$  и  $CD$  пересекаются  $\Leftrightarrow$

$[C$  и  $D$  по разные стороны от прямой  $AB]$  И

$[A$  и  $B$  по разные стороны от прямой  $CD]$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}) \leq 0 \text{ И } (\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CA}) \cdot (\overrightarrow{CD} \times \overrightarrow{CB}) \leq 0$$

# Нормальный вектор

Пусть дан вектор  $a = (a_x, a_y)$ . Как быстро построить вектор  $b$ , нормальный к  $a$ ?

$b = (b_x, b_y)$  должен удовлетворять  $a \cdot b = 0$ .

Чуть-чуть подумав, видим легкое решение к задаче:

$b^1 = (-a_y, a_x)$  и  $b^2 = (a_y, -a_x)$ .

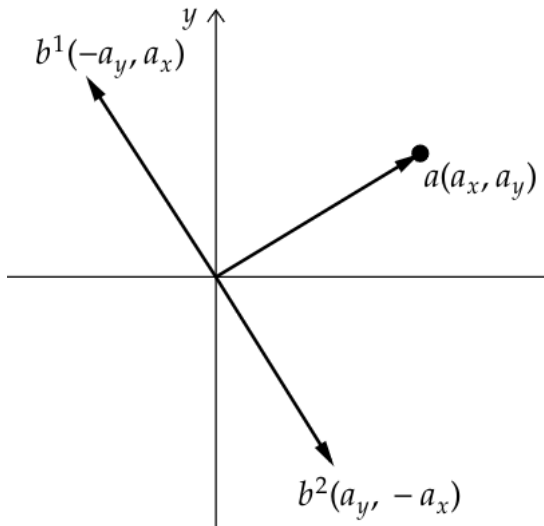
Это две противоположные по направлению нормали к  $a$ . А как понять, кто из них кто?

Ответ:  $b^1$  «левее» к  $a$ ,  $b^2$  «правее» к  $a$ .

Чтобы убедить себя, можно быстро чекнуть на векторе  $a = (1, 1)$ :

левая нормаль — это  $(-1, 1)$ , правая —  $(1, -1)$ .

# Нормальный вектор



# Уравнение прямой

Как можно задать прямую?

- Двумя точками:  $P_0, P_1$ . Две точки однозначно задают прямую, конечно.
- Точкой  $P_0$  и направляющим вектором  $\vec{d}$ .
- Точкой  $P_0$  и нормалью к прямой  $\vec{n}$ .
- Уравнением прямой:  $Ax + By + C = 0$ .

Переходы между первыми тремя формами достаточно тривиальны:

$$\begin{aligned}\vec{d} &= P_1 - P_0; & P_1 &= P_0 + \vec{d}. \\ \vec{n}_1 &= (-d_y, d_x) \text{ и } \vec{n}_2 = (d_y, -d_x); \\ \vec{d}_1 &= (-n_y, n_x) \text{ и } \vec{d}_2 = (n_y, -n_x)\end{aligned}$$

# Уравнение прямой

А как получается уравнение прямой?

Получим уравнение прямой от точки  $P_0 = (x_0, y_0)$  и нормали к прямой  $n = (n_x, n_y)$ :

для любой точки  $P = (x, y)$  прямой должно выполняться уравнение  $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow (x - x_0) \cdot n_x + (y - y_0) \cdot n_y = 0$$

$$\Leftrightarrow xn_x + yn_y + (-x_0n_x - y_0n_y) = 0$$

$$\Leftrightarrow Ax + By + C = 0, \text{ где}$$

$$A = n_x, B = n_y, C = (-x_0n_x - y_0n_y).$$

Главная мораль: Коэффициенты  $(A, B)$  уравнения прямой составляют нормаль к ней!

Зная это, перейти от уравнения прямой к предыдущим формам тривиально.

# Расстояние от точки до прямой

Пусть дана прямая  $Ax + By + C = 0$  и точка  $P_0 = (x_0, y_0)$ .  
Определить расстояние от точки до прямой.

Нормализуем уравнение прямой:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

Для такого уравнения его коэффициенты дают *единичную нормаль* к прямой:  $\vec{n} = (\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}})$

Давайте подставим  $P$  в это уравнение прямой:

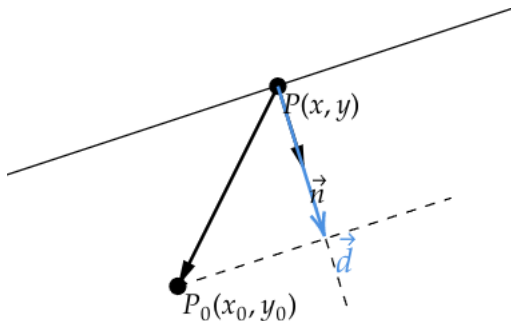
$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}x_0 + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}y_0 + \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}} = d$ , где  $d$  — расстояние от  $P_0$  до прямой.

# Расстояние от точки до прямой

Причина: вычтем уравнение прямой от этого, получим

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}(x_0 - x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}(y_0 - y) = d$$

Слева стоит скалярное произведение единичной нормали к вектору от прямой до  $P$ .





# Расстояние от точки до прямой

Короче, расстояние от  $P_0$  до прямой  $Ax + By + C = 0$ :

$$|\vec{d}| = \left| \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}x_0 + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}y_0 + \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|$$

Если прямая задана двумя точками  $P_1 = (x_1, y_1)$  и  $P_2 = (x_2, y_2)$ , то тоже очень просто получаем через векторное произведение:

$$S_{\triangle P_0 P_1 P_2} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{P_0 P_1} \times \overrightarrow{P_0 P_2}| = \frac{1}{2} h \cdot |\overrightarrow{P_1 P_2}|$$

$\Rightarrow$  расстояние

$$h = \frac{|\overrightarrow{P_0 P_1} \times \overrightarrow{P_0 P_2}|}{|\overrightarrow{P_1 P_2}|}$$

# Пересечение прямых

Пусть даны две прямые  $A_1x + B_1y + C_1 = 0$  и  $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ . Надо найти их пересечение.

Сначала надо убедиться что они не параллельны  $\Leftrightarrow$  не параллельны их нормали  $\vec{n}_1 = (A_1, B_1)$  и  $\vec{n}_2 = (A_2, B_2)$   
 $\Leftrightarrow \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 \neq 0$ .

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_1B_2x + B_1B_2y + C_1B_2 = 0 \\ A_2B_1x + B_2B_1y + C_2B_1 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}$$

$$\text{Аналогично, } y = \frac{C_2A_1 - C_1A_2}{A_2B_1 - A_1B_2}$$

# Проекция точки на прямую

Пусть дана прямая  $Ax + By + C = 0$  и точка  $P_0 = (x_0, y_0)$ . Надо найти проекцию точки  $P_0$  на прямую.

- Находим расстояние  $h$  от  $P_0$  до прямой.
- Рисуем два кандидата на проекцию:  $P_0 + h\vec{n}$  и  $P_0 - h\vec{n}$ .
- Честно проверяем, каой из двух кандидатов реально подходит.