Вычислительная геометрия на плоскости

Е.В. Андреева, Ю.Е. Егоров,
Москва

“Вычислительная геометрия — это раздел информатики, изучающий алгоритмы решения геометрических задач. Такие задачи возникают в компьютерной графике, проектировании интегральных схем, технических устройств и др. Исходными данными в такого рода задачах могут быть множество точек, набор отрезков, многоугольник и т.п. Результатом может быть либо ответ на какой-то вопрос (типа “пересекаются ли эти прямые”), либо какой-то геометрический объект (например, наименьший выпуклый многоугольник, содержащий заданные точки)” [1].

В “Информатике” № 14 за этот год была опубликована статья одного из авторов, посвященная задачам вычислительной геометрии в олимпиадах по информатике. В частности, там был сформулирован ряд элементарных подзадач, на которые опирается решение большинства задач вычислительной геометрии. Однако занятия даже с математически хорошо подготовленными учащимися старших классов показали, что решение таких подзадач вызывает у них большое затруднение. Задача либо ставит их в тупик, либо выбранный “лобовой” способ решения настолько сложен, что довести его до конца без ошибок учащиеся не могут. Анализ результатов решения “геометрических” задач на всероссийских олимпиадах по информатике приводит к тем же выводам. Такую ситуацию мы считаем поправимой. Цель настоящей статьи — показать подходы к решению геометрических задач на плоскости, которые позволяют достаточно быстро и максимально просто получать решения большинства элементарных подзадач.

Векторы и координаты

Чтобы применять методы вычислительной геометрии, необходимо геометрические образы перевести на язык чисел. Будем считать, что на плоскости задана декартова система координат (СК). Общепринято выбирать координатные оси так, чтобы поворот на угол $\frac{\pi}{2}$, при котором ось Ox совмещается с осью Oy, происходил против часовой стрелки. Такую СК называют *правой*. В дальнейшем подразумевается, что наша СК правая. В такой СК направление поворота против часовой стрелки называется положительным.

Теперь геометрические объекты получают аналитическое выражение. Так, чтобы задать отрезок, достаточно указать координаты его концов. Прямую можно задать, указав пару ее точек, либо координатами одной ее точки и вектором, характеризующим направление этой прямой, и т.д. Вообще при решении задач основным инструментом для нас будут векторы. Напомним поэтому некоторые сведения о них.

Отрезок AB, у которого точку A считают началом (точкой приложения), а точку B — концом, называют *вектором* AB и обозначают либо $\overrightarrow{AB}$, либо жирной строчной латинской буквой, например, $\boldsymbol{a}$. Для обозначения длины вектора (то есть длины соответствующего отрезка) будем пользоваться символом модуля (например, $|\boldsymbol{a}|$). Два вектора называются равными, если они совмещаются параллельным переносом.

Пусть точки A и B имеют координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) соответственно. Координатами вектора $\overrightarrow{AB}$ называется пара чисел $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Наоборот, если вектор имеет координаты (x, y) и приложен к точке (x_1, y_1), то легко вычислить координаты (x_2, y_2) его конца: $x_2 = x_1 + x$, $y_2 = y_1 + y$. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ по теореме Пифагора равна $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. Равенство двух векторов $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$ и $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y)$ эквивалентно равенству их соответствующих координат: $a_x = b_x$, $a_y = b_y$.

Векторы можно складывать и умножать на числа. Сложение векторов производится по правилу треугольника или по правилу параллелограмма (*рис.* 1).

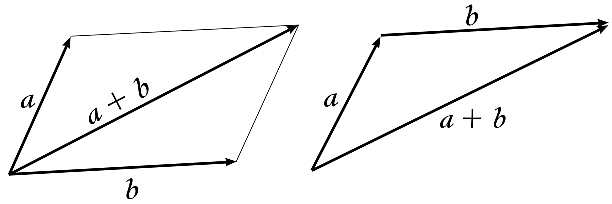

Рис. 1

Под разностью векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ понимают сумму вектора $\boldsymbol{a}$ с вектором, противоположным вектору $\boldsymbol{b}$ (т.е. противоположно направленным и совпадающим с ним по длине). При умножении вектора $\boldsymbol{a}$ на число t получается вектор, имеющий длину $|t| \cdot |\boldsymbol{a}|$; его направление совпадает с направлением $\boldsymbol{a}$, если $t > 0$, и противоположно ему, если $t < 0$. Это позволяет нам ввести отношение коллинеарных векторов (т.е. сонаправленных или противоположно направленных), понимая под ним коэффициент их пропорциональности. С помощью такого отношения удобно описывать порядок расположения точек на прямой. Например, условие $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}} < 0$ означает, что точки A, B и C лежат на одной прямой, причем точка A лежит между B и C. Отметим еще, что вектор, сонаправленный с данным вектором $\boldsymbol{a}$ и имеющий заданную длину l, можно выразить следующим образом: $\dfrac{l}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$. В дальнейшем мы неоднократно будем этим пользоваться. В координатах перечисленные операции над векторами записываются так:

если $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y)$ и $\boldsymbol{b} = (b_x, b_y)$,

то $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y)$,

$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y)$ и $t \cdot \boldsymbol{a} = (t \cdot a_x, t \cdot a_y)$.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$ называется число

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \cos \varphi,$$

где φ — угол между этими векторами.

В координатах оно вычисляется так:

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Как видно из формул, скалярное произведение можно использовать для нахождения угла между векторами. В частности, два ненулевых вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю ($\cos\frac{\pi}{2}=0$). Так как $\cos \varphi$ положителен для острых углов и отрицателен для тупых, угол между векторами острый (тупой) в том и только том случае, когда их скалярное произведение положительно (отрицательно).

Угол между векторами

Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два ненулевых вектора, отложенные от одной точки. В школьном курсе геометрии под углом между векторами понимается меньший из двух углов между лучами, на которых лежат векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Значение такого угла всегда находится в промежутке $[0; \pi]$.

Для вычислений часто более удобным оказывается понятие ориентированного угла, т.е. угла, учитывающего взаимное расположение векторов. Значение ориентированного угла по абсолютной величине равно обычному углу между векторами. Ориентированный угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ положительный, если поворот от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ совершается в положительном направлении (в нашей СК против часовой стрелки), и отрицательный — в другом случае. Говорят также, что пара векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ положительно (отрицательно) ориентирована. Таким образом, величина ориентированного угла зависит от порядка перечисления векторов и может принимать значения в интервале $(-\pi; \pi]$. На *рис.* 2 ориентированные углы между векторами $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ и между векторами $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OA}$ равны по модулю, но первый из них отрицательный, а второй — положительный.

Для любых векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ и $\overrightarrow{OC}$ легко вычислить величину ориентированного угла *AOB*, зная величины углов *AOC* и *COB*: она равна их сумме с учетом знаков. Например, при таком расположении векторов, как на *рис.* 2, угол *AOC* войдет в сумму со знаком плюс, а угол *COB* — с минусом. Может случиться, что при суммировании двух положительных (двух отрицательных) углов результат превзойдет π по модулю. Тогда, чтобы получить правильное значение угла, нужно отнять (добавить) 2π. Замечательно, что при этом нам не придется рассматривать различные случаи взаимного расположения векторов. В этом и состоит преимущество использования ориентированных углов.

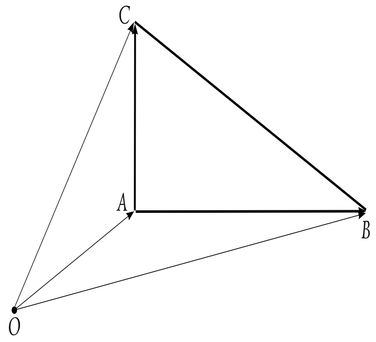

Рис. 2

Как, зная координаты векторов, найти угол между ними? Очевидный способ следует из формулы для скалярного произведения: $\cos\varphi = \dfrac{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$. Однако при этом получится значение неориентированного угла и часть информации (возможно, полезная) будет нами потеряна. Кроме того, использование этой формулы для программирования не всегда удобно. Например, в языке Паскаль, как и в ряде других языков программирования, из обратных тригонометрических функций реализована только функция arctg φ. Мы покажем, как найти угол иначе, после того, как познакомимся с ориентированной площадью.

Ориентированная площадь

Ориентированная площадь треугольника — это его обычная площадь, снабженная знаком. Знак у ориентированной площади треугольника *ABC* такой же, как у ориентированного угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. То есть ее знак зависит от порядка перечисления вершин. На *рис.* 2 треугольник *ABC* — прямоугольный. Его ориентированная площадь равна $\dfrac{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|}{2}$ (она больше нуля, так как пара $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ориентирована положительно). Эту же величину можно вычислить другим способом. Пусть *O* — произвольная точка плоскости. На нашем рисунке площадь треугольника *ABC* получится, если из площади треугольника *OBC* вычесть площади *OAB* и *OCA*. Таким образом, нужно просто *сложить ориентированные площади* треугольников *OAB*, *OBC* и *OCA*. Это правило работает при любом выборе точки *O*.

Точно так же для вычисления площади любого многоугольника $A_1A_2...A_n$ нужно сложить ориентированные площади треугольников OA_1A_2, OA_2A_3, ..., OA_nA_1 (*рис.* 3). В сумме получится площадь многоугольника, взятая со знаком плюс, если при обходе ломаной $A_1A_2...A_n$ внутренность многоугольника находится слева, и со знаком минус, если она находится справа. Она и называется “ориентированной площадью многоугольника $A_1A_2...A_n$”. Таким образом, для правой СК ориентированная площадь окажется положительной при обходе границы многоугольника против часовой стрелки.

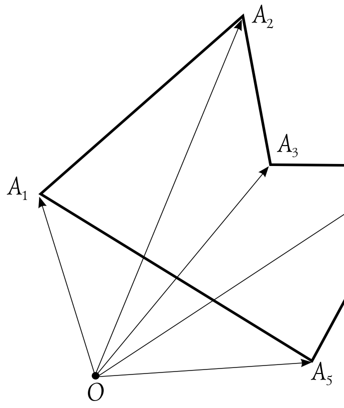

Рис. 3

Итак, вычисление площади многоугольника свелось к нахождению ориентированной площади треугольника. Посмотрим, как выразить ее в координатах. Пусть S — ориентированная площадь треугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$. Вычислим ее для конкретного расположения векторов (*рис.* 4). Величина S здесь положительна (пара векторов $\boldsymbol{a} = \overrightarrow{OA}$ и $\boldsymbol{b} = \overrightarrow{OB}$ положительно ориентирована). Достроим наш треугольник до параллелограмма $OACB$ площади $2S$ (здесь $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$). Тогда площадь прямоугольника OC_1CC_2 равна

$$\begin{aligned}|OC_1| \cdot |OC_2| &= (x_1 + x_2)(y_1 + y_2) = \\ &= 2S + 2S_1 + 2S_2 + 2S_3 = \\ &= 2S + x_1y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_1\end{aligned}$$

(здесь S_1, S_2, S_3 — обычные неориентированные площади). Раскрыв скобки в левой части равенства и выразив $2S$, получим

$$2S = x_1y_2 - x_2y_1. \qquad (1)$$

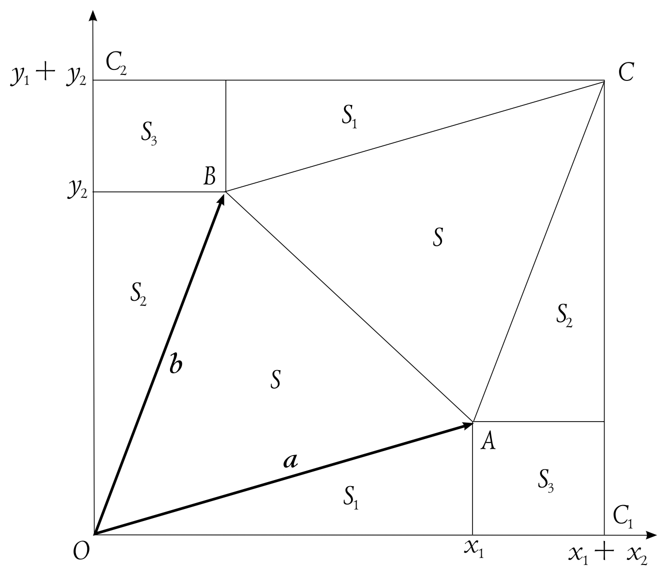

Рис. 4

Нетрудно убедиться, что и при других вариантах расположения векторов формула (1) также остается справедливой. Таким образом, ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$, равна $x_1y_2 - x_2y_1$.

Величина $x_1y_2 - x_2y_1$ называется *косым* (или *псевдоскалярным*) *произведением* векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Для косого произведения мы будем употреблять обозначение $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$. Его название связано со свойством косой симметрии: $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = -[\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}]$ (в литературе это обозначение используется для векторного произведения, но в отличие от последнего косое произведение — скаляр). Так как неориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равна $|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot |\sin\varphi|$, а знак $\sin\varphi$ совпадает со знаком ориентированного угла φ, то $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin\varphi$. Величина $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ больше нуля, если пара векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ положительно ориентирована, и меньше нуля в противном случае. Косое произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда они коллинеарны ($\sin 0 = \sin\pi = 0$).

Теперь, как и обещали, найдем в координатах угол между двумя векторами. Пусть φ — ориентированный угол между векторами $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$ и $\boldsymbol{b} = (x_2, y_2)$. Сопоставляя формулы для скалярного и косого произведений этих векторов, имеем $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{[a,b]}{(a,b)} = \dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1x_2 + y_1y_2}$. Зная тангенс угла между векторами, мы легко найдем угол между прямыми, на которых лежат $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$: он равен $\left|\operatorname{arctg}\dfrac{[a,b]}{(a,b)}\right|$. Чтобы получить непосредственно сам угол между векторами, осталось выяснить, острый он или тупой. Это мы определим по знаку скалярного произведения. Учтем еще, что знак ориентированного угла совпадает со знаком косого произведения. Тогда окончательно имеем:

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ если } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0,\ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] > 0;$$

$$\varphi = -\frac{\pi}{2}, \text{ если } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = 0,\ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] < 0;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{[a,b]}{(a,b)}, \text{ если } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) > 0; \qquad (2)$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{[a,b]}{(a,b)} + \pi, \text{ если } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < 0,\ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \geq 0;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{[a,b]}{(a,b)} - \pi, \text{ если } (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < 0,\ [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] < 0.$$

Величина обычного угла равна модулю значения ориентированного угла.

Отметим, что все сказанное об ориентированных углах и площадях относилось к правой СК. Может статься, что для конкретной задачи удобнее ввести левую СК. К примеру, координаты пикселей на экране монитора даются именно в левой СК (ось абсцисс смотрит вправо, ось ординат — вниз). При таком выборе осей положительным является поворот *по* часовой стрелке. С этой поправкой все вышеизложенное применимо и к левой СК.

Уравнения линий

1.1. Уравнение прямой, проходящей через две различные точки, заданные своими координатами.

Пусть на прямой заданы две несовпадающие точки: P_1 с координатами (x_1, y_1) и P_2 с координатами (x_2, y_2). Соответственно вектор с началом в точке P_1 и концом в точке P_2 имеет координаты $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. Если $P(x, y)$ — произвольная точка на нашей прямой, то координаты вектора $\overrightarrow{P_1P}$ равны $(x - x_1, y - y_1)$. С помощью косого произведения условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{P_1P}$ и $\overrightarrow{P_1P_2}$ можно выразить так: $[\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}] = 0$,

т.е. $(x - x_1)(y_2 - y_1) - (y - y_1)(x_2 - x_1) = 0$ (3)

или

$$(y_2 - y_1)x + (x_1 - x_2)y + x_1(y_1 - y_2) + y_1(x_2 - x_1) = 0$$

Последнее уравнение перепишем следующим образом:

$$ax + by + c = 0, \quad (4)$$

где $a = y_2 - y_1$,
$b = x_1 - x_2$,
$c = x_1(y_1 - y_2) + y_1(x_2 - x_1)$.

Итак, всякую прямую можно задать уравнением вида (4). В следующем пункте мы покажем, что и наоборот, при любых значениях коэффициентов (кроме $a = b = 0$) уравнение такого вида задает на плоскости некоторую прямую.

Заметим, что при программировании первую из формул (3) нельзя использовать в форме отношения $\frac{x_2 - x_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y - y_1}$, так как, во-первых, даже если все координаты заданных точек целые, ошибки вещественной арифметики при операции деления не позволят проверять с помощью указанного соотношения принадлежность той или иной точки данной прямой, а, во-вторых, если точка P совпадет с P_1, программа будет прервана в силу деления на ноль.

Уравнение прямой можно записывать и в параметрическом виде. Любой вектор, приложенный к точке P_1 и заканчивающийся в произвольной точке $P(x, y)$, лежащей на нашей же прямой, можно получить из $\overrightarrow{P_1P_2}$ путем умножения на некоторое вещественное число t. Тогда для каждой из координат в отдельности справедливо:

$$(x - x_1) = t(x_2 - x_1) \text{ и } (y - y_1) = t(y_2 - y_1).$$

Выразив отсюда x и y, получаем систему параметрических уравнений, которой удовлетворяет каждая точка нашей прямой:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y &= y_1 + t(y_2 - y_1). \end{aligned} \quad (5)$$

Наоборот, если координаты (x, y) точки P удовлетворяют этим соотношениям, вектор $\overrightarrow{P_1P}$ коллинеарен $\overrightarrow{P_1P_2}$ и, значит, точка P лежит на прямой P_1P_2. Таким образом, система уравнений (5), где параметр t пробегает всю действительную ось, задает прямую P_1P_2.

Эта же система, но со введенными ограничениями на значения t, будет задавать и отрезок P_1P_2, и луч P_1P_2. Для отрезка $t \in [0, 1]$ (то есть x меняется в диапазоне $[x_1, x_2]$, а y — в диапазоне $[y_1, y_2]$), а для луча — $t \in [0, \infty)$.

1.2. Уравнение прямой, заданной одной из ее точек и вектором нормали к ней.

Пусть заданная точка P_0 прямой имеет координаты (x_0, y_0), а некоторый вектор нормали $\boldsymbol{n}$ к ней (то есть вектор, ортогональный нашей прямой) — координаты (a, b). Если $P(x, y)$ — произвольная точка на нашей прямой, то координаты вектора $\overrightarrow{P_0P}$ равны $(x - x_0, y - y_0)$. Тогда скалярное произведение ортогональных векторов $(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{P_0P})$ можно выразить так:

$$(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{P_0P}) = a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \quad (6)$$

Очевидно, что уравнение прямой (6) также несложно привести к виду (4). Тогда становится понятно, что коэффициенты a и b из уравнения (4) представляют собой координаты одного из векторов нормали к описываемой данным уравнением прямой. Отсюда следует, что при любых значениях коэффициентов a, b и c (кроме $a = b = 0$) уравнение (4) задает прямую. Ею будет прямая, перпендикулярная вектору (a, b) и проходящая через точку, чьи координаты удовлетворяют (4). При $a \neq 0$ такой точкой будет, например, точка $(-\frac{c}{a}, 0)$, при $a = 0$ — точка $(0, -\frac{c}{b})$.

Несмотря на то что постановка задачи на первый взгляд кажется несколько искусственной, именно с ее помощью мы получили удобный инструмент для рассмотрения целого ряда других задач. В чем сейчас нам и предстоит убедиться.

1.3. Уравнение прямой, перпендикулярной данной и проходящей через заданную точку.

Пусть заданная точка P_0 искомой прямой имеет координаты (x_0, y_0). Если $P(x, y)$ — произвольная точка на той же прямой, то координаты вектора $\overrightarrow{P_0P}$ равны $(x - x_0, y - y_0)$. Этот вектор перпендикулярен вектору $\overrightarrow{P_1P_2}$, где $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$ — точки на данной прямой. Тогда скалярное произведение ортогональных векторов $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_0P})$ можно выразить так:

$(x_2 - x_1)(x - x_0) + (y_2 - y_1)(y - y_0) = 0$ (7)

или

$$(x_2 - x_1)x + (y_2 - y_1)y + (x_2 - x_1)x_0 + (y_2 - y_1)y_0 = 0.$$

Если же исходная прямая задана коэффициентами a, b и c своего уравнения, то легко заметить, что вектор ее нормали с координатами (a, b) коллинеарен вектору $\overrightarrow{P_0P}$.

Тогда, записывая косое произведение этих векторов, получим

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0. \qquad (8)$$

1.4. Уравнение прямой, параллельной данной и находящейся от нее на заданном расстоянии r.

Очевидно, что искомых прямых две. Вектор нормали к исходной прямой ортогонален и каждой из параллельных прямых. Значит, коэффициенты a и b при x и y в уравнении (4) для параллельных прямых можно взять такими же, как и у исходной прямой. Остается подобрать значение для третьего из коэффициентов. Обозначим его для одной прямой c_1, для второй — c_2. Как уже было показано выше, для определения этих коэффициентов достаточно знать хотя бы по одной точке на каждой прямой.

Возьмем произвольную точку $P(x_0, y_0)$ на исходной прямой (если прямая была задана не двумя точками, то точку можно найти по рецепту, предложенному в конце 1.2). Проведем через нее прямую, перпендикулярную данной. На параллельной же прямой будем искать точку $M(x_1, y_1)$ ее пересечения с этим перпендикуляром (*рис.* 5). Нам известен один вектор нормали $\boldsymbol{n} = (a, b)$. Вектор $\overrightarrow{PM}$ коллинеарен ему, а его длина равна r. Для определенности будем считать, что, как и на рисунке, нормаль лежит по ту же сторону от прямой, что и точка M. Тогда $\overrightarrow{PM} = \boldsymbol{n} \cdot \dfrac{r}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Значит, координаты точки M равны $x_0 + a \cdot \dfrac{r}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $y_0 + b \cdot \dfrac{r}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Подставляя их в уравнение (6), получаем $c_1 = -ax_0 - by_0 - r\sqrt{a^2 + b^2}$.

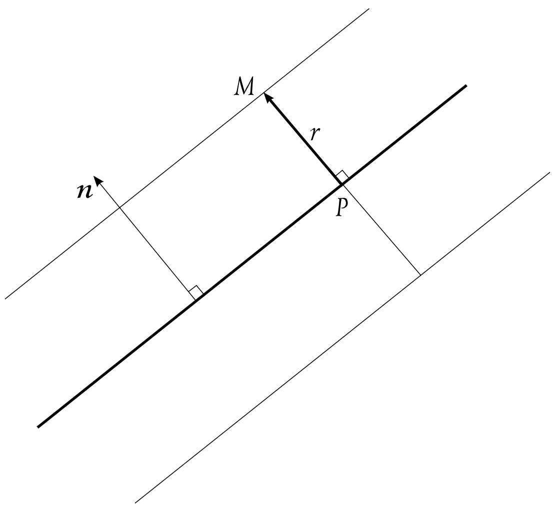

Рис. 5

Уравнение одной из прямых получено. В качестве вектора нормали для другой прямой можно использовать вектор $-\overrightarrow{PM}$. В этом случае имеем

$$c_2 = -ax_0 - by_0 + r\sqrt{a^2 + b^2}.$$

1.5. Уравнение биссектрисы угла.

Пусть векторы $\overrightarrow{P_0P_1}$ (x_1, y_1) и $\overrightarrow{P_0P_2}$ (x_2, y_2) приложены к точке $P_0(x_0, y_0)$. Найдем уравнение биссектрисы угла $P_1P_0P_2$. Если мы разделим каждый из векторов $\overrightarrow{P_0P_1}$ и $\overrightarrow{P_0P_2}$ на его длину, получив при этом векторы единичной длины, то вектор их суммы будет лежать на биссектрисе угла между ними (*рис.* 6). Координаты этого вектора равны

$$\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}, \ \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}.$$

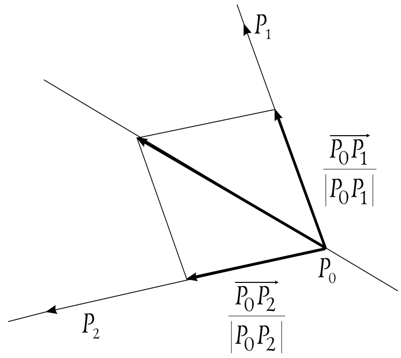

Рис. 6

Из условия его коллинеарности вектору $\overrightarrow{P_0P}$, где $P(x, y)$ — произвольная точка на искомой прямой, получаем уравнение биссектрисы:

$$\left(\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{y_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}\right)(x - x_0) - \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}} + \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2}}\right)(y - y_0) = 0. \qquad (9)$$

При необходимости из (9) несложно получить коэффициенты a, b и c для записи уравнения найденной прямой в виде (4).

1.6. Уравнение окружности.

По определению окружности с центром в точке $M_0(x_0, y_0)$ и радиусом r, точка $M(x, y)$ принадлежит ей тогда и только тогда, когда расстояние между M_0 и M равно r. Записав формулу для вычисления квадрата расстояния между двумя точками, мы придем к следующему уравнению окружности:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \qquad (10)$$

На практике оказывается полезным знание также и параметрических уравнений окружности. Обратимся сначала к окружности с центром в начале координат. Если обозначить за t — угол между радиусом-вектором OM (здесь $M(x, y)$ — произвольная точка окружности) и осью Ox, отсчитываемый против часовой стрелки, то очевидно, что $x = r\cos t$, $y = r\sin t$. Значит, для произвольной окружности параметрические уравнения будут выглядеть так:

$$x = x_0 + r\cos t, \quad y = y_0 + r\sin t. \qquad (11)$$

В заключение покажем, как определить длину l наименьшей дуги окружности, если известны координаты центра окружности (x_0, y_0) и концов дуги (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Из курса геометрии известно, что длина окружности прямо пропорциональна углу φ между векторами $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$ и $(x_2 - x_0, y_2 - y_0)$: $l = r\varphi$. А как вычислить значение такого угла, уже было показано выше (надо только учесть, что в случае поиска длины наименьшей из двух дуг нас интересует неориентированный угол в диапазоне $[0, \pi]$).

1.7. Касательные к окружности.

Пусть окружность имеет центр в точке $P_0(x_0, y_0)$ и радиус r. Требуется найти уравнение касательных к ней, проходящих через точку $P_1(x_1, y_1)$. Здесь возможны три случая. Если $|P_0P_1| < r$, то P_1 лежит внутри окружности и касательных, проходящих через нее, не существует. Если $|P_0P_1| = r$, то P_1 лежит на окружности. Тогда у искомой касательной нам известны точка P_1 и нормаль $\overrightarrow{P_1P_0}$, и ее уравнение легко выписывается (см. п. 1.3). Наконец, в случае $P_0P_1 > r$ точек касания две, и, обозначив одну из них P_2, мы имеем прямоугольный треугольник $P_0P_2P_1$ (*рис.* 7). Можно попытаться найти искомое уравнение "в лоб". Если (x_2, y_2) — координаты точки касания P_2, то по теореме Пифагора выписывается длина отрезка P_1P_2 ($P_0P_2 = r$, P_0P_1 вычисляется по известным координатам). Другое соотношение на координаты x_2 и y_2 — уравнение окружности (10). Оба эти уравнения квадратные. Решение такой системы уравнений представляет серьезную трудность для учащихся. Попробуем обойтись без квадратных уравнений, используя скалярное и косое произведения векторов.

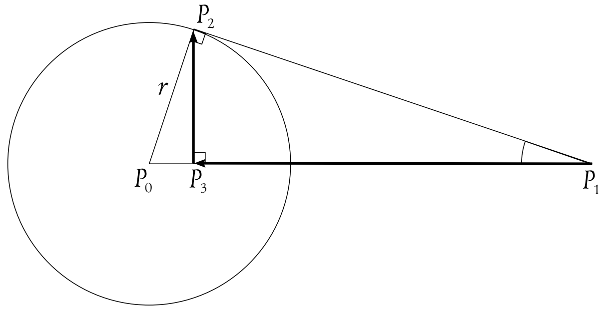

***Рис.* 7**

Мы будем искать координаты $a = x_2 - x_1$ и $b = y_2 - y_1$ вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$. Как уже было сказано выше, длины сторон прямоугольного треугольника $P_0P_2P_1$ легко находятся. Выпишем скалярное произведение векторов $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_1P_0}$:

$$(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_0}) = |P_1P_2| \cdot |P_1P_0| \cdot \cos\varphi = |P_1P_2|^2.$$

Геометрический смысл косого произведения $[\overrightarrow{P_1P_0}, \overrightarrow{P_1P_2}]$ — удвоенная площадь треугольника $P_0P_2P_1$, взятая со знаком плюс для одной из точек касания и с минусом — для другой:

$$[\overrightarrow{P_1P_0}, \overrightarrow{P_1P_2}] = \pm|P_0P_2| \cdot |P_1P_2|.$$

Записывая эти же произведения в координатах, получим систему линейных уравнений относительно a и b:

$$(x_0 - x_1) \cdot a + (y_0 - y_1) \cdot b = |P_1P_2|^2,$$
$$(x_0 - x_1) \cdot b - (y_0 - y_1) \cdot a = \pm|P_0P_2| \cdot |P_1P_2|.$$

Такую систему решить уже несложно. Далее по точке $P_1(x_1, y_1)$ и направляющему вектору $\overrightarrow{P_1P_2} = (a, b)$ выписывается уравнение касательной. Задача решена. Если же нам требуется еще найти и координаты точки касания, то это можно сделать, используя координаты точки P_1 и найденные координаты вектора $\overrightarrow{P_1P_2}$.

К решению этой же задачи есть подход, при котором не приходится решать даже систему линейных уравнений. Опустим из вершины P_2 прямого угла высоту P_2P_3 (*рис.* 7). Из подобия треугольников $P_1P_2P_0$ и $P_1P_3P_2$ найдем длины отрезков P_1P_3 и P_3P_2: $|P_1P_3| = \dfrac{|P_1P_2|^2}{|P_0P_1|}$; $|P_2P_3| = \dfrac{|P_1P_2| \cdot |P_0P_2|}{|P_0P_1|}$. Теперь последовательно находим координаты вектора $\overrightarrow{P_1P_3}$, точки $P_3(x_3, y_3)$ и, наконец, используя известные координаты вектора $\boldsymbol{n} = (y_0 - y_1, x_1 - x_0)$, перпендикулярного прямой P_1P_3, координаты точки P_2:

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \frac{|P_1P_3|}{|P_1P_0|};$$

$$x_3 = x_1 + (\overrightarrow{P_1P_3})_x, \quad y_3 = y_1 + (\overrightarrow{P_1P_3})_y;$$

$$\overrightarrow{P_3P_2} = \boldsymbol{n} \cdot \frac{|P_3P_2|}{|\boldsymbol{n}|};$$

$$x_2 = x_3 + (\overrightarrow{P_3P_2})_x, \quad y_2 = y_3 + (\overrightarrow{P_3P_2})_y.$$

Продолжение в № 41/2002