Вычислительная геометрия на плоскости

Е.В. Андреева, Ю.Е. Егоров,
Москва

Продолжение. Начало в № 39/2002

Взаимное расположение точек и фигур

2.1. Расположение точки относительно прямой, луча или отрезка.

В первую очередь в этой задаче нас интересует принадлежность данной точки $P(x, y)$ указанному геометрическому объекту, уравнение которого нам известно (либо может быть легко получено). Чтобы ответить на этот вопрос для прямой, достаточно подставить координаты заданной точки в уравнение прямой (3) или (4). Равенство нулю значения полученного выражения (для вещественных координат или коэффициентов уравнения проверку на равенство нулю необходимо осуществлять с учетом погрешности) означает, что точка принадлежит данной прямой. Если значение выражения меньше нуля, то точка лежит в одной полуплоскости от прямой, если больше нуля — в другой. Действительно, уравнение (3) получено в предположении, что прямая проходит через точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$. Заметим, что левая часть (3) — это значение косого произведения векторов $\overrightarrow{P_1P}$ и $\overrightarrow{P_1P_2}$. Его знак определяет ориентацию этой пары векторов, иначе говоря, принадлежность точки P одной из полуплоскостей (а равенство нулю — принадлежность прямой).

Если прямая изначально задана двумя своими точками, то для решения данной задачи достаточно вычислить значение указанного косого произведения, а уравнение прямой выписывать не нужно.

В случае проверки принадлежности точки лучу при равенстве $[\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}]$ нулю (здесь P_1 — начало луча, а P_2 — любая точка, принадлежащая лучу) полезно вычислить и скалярное произведение этих же векторов. Если оно меньше нуля, то P_1 лежит на прямой между P_2 и P, следовательно, P лучу не принадлежит. Чтобы в аналогичной ситуации убедиться в принадлежности точки P отрезку P_1P_2, необходимо вычислить еще и значение скалярного произведения $(\overrightarrow{P_2P_1}, \overrightarrow{P_2P})$. Если оно неотрицательно, то точка P лежит на отрезке.

Пусть теперь нам требуется определить, на каком расстоянии находится заданная точка P от определенной прямой, луча или отрезка. Формула для расстояния от точки до прямой получается из сопоставления двух способов вычисления площади треугольника: $2S = h \cdot |P_1P_2| = |[PP_1, PP_2]|$ (см. *рис.* 8). То есть расстояние h от точки P до прямой, заданной координатами точек P_1 и P_2, можно подсчитать как отношение модуля косого произведения векторов $\overrightarrow{PP_1}$ и $\overrightarrow{PP_2}$ к длине отрезка P_1P_2.

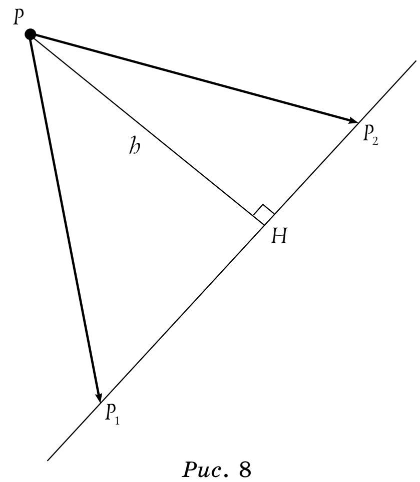

Рис. 8

Для луча или отрезка указанный способ нахождения расстояния нужно слегка подкорректировать. Точка H (*рис.* 8) принадлежит лучу P_1P_2 в том и только том случае, когда скалярное произведение $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P}) \geq 0$. Для отрезка P_1P_2, конечно, нужно еще и выполнение условия $(\overrightarrow{P_2P_1}, \overrightarrow{P_2P}) \geq 0$. Тогда применима формула расстояния от точки до прямой. В противном случае расстояние от точки до луча (отрезка) будет равно расстоянию от точки до начала луча (до ближайшего конца отрезка).

2.2. Взаимное расположение двух точек относительно прямой.

Обычно требуется просто выяснить, по одну или разные стороны от определенной прямой лежат две точки P_1 и P_2, заданные своими координатами. Выберем на прямой две произвольные несовпадающие точки — P_3 и P_4 (ими могут быть как раз те точки, которыми определена наша прямая). Тогда, если косые произведения $[\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}]$ и $[\overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}]$ имеют разный знак, то есть $[\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}] \cdot [\overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}] < 0$, то точки лежат по разные стороны от прямой; если знаки совпадают — то по одну сторону, а если одно из них равно 0, то соответствующая точка лежит на исходной прямой. Вообще же эта задача является частью следующей, более сложной, задачи.

2.3. Взаимное расположение двух прямых или прямой и отрезка.

Легко выяснить, пересекаются ли две прямые или параллельны. Напомним еще раз, что условие коллинеарности двух векторов — это равенство нулю их косого произведения. Если прямые заданы уравнениями $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ и $a_2x + b_2y + c_2 = 0$, то удобно перейти к их нормалям $\boldsymbol{n_1} = (a_1, b_1)$ и $\boldsymbol{n_2} = (a_2, b_2)$. Тогда условие коллинеарности нормалей (а значит, и параллельности прямых): $[\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2] = a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Если прямые заданы парами точек, то таким же способом проверяется коллинеарность направляющих векторов. Проверка наличия пересечения прямой и отрезка нами фактически уже была произведена при решении задачи 2.2.

Пусть прямая и отрезок пересекаются в одной точке. Найдем ее.

Обозначим концы отрезка $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$. Пусть $P_3(x_3, y_3)$ и $P_4(x_4, y_4)$ — две точки на прямой, а M — искомая точка пересечения (*рис.* 9). Опустим из концов отрезка на прямую перпендикуляры P_1H_1 и P_2H_2. Треугольники $P_3P_1P_4$ и $P_3P_2P_4$ имеют общее основание. Следовательно, отношение их площадей равно отношению их высот $|P_1H_1|$ и $|P_2H_2|$. Но площадь (ориентированная) треугольника $P_3P_1P_4$ — это $\frac{1}{2}[\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}]$, аналогично выражается площадь $P_3P_2P_4$. То есть

$$\frac{|[\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}]|}{|[\overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}]|} = \frac{|P_1H_1|}{|P_2H_2|} = \frac{|P_1M|}{|P_2M|}.$$

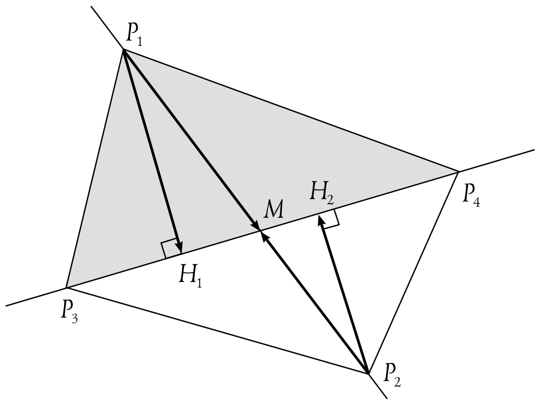

***Рис.* 9**

Последнее равенство вытекает из подобия треугольников P_1H_1M и P_2H_2M. Отсюда получаем

$$[\overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}]\cdot\overrightarrow{P_1M} = [\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}]\cdot\overrightarrow{P_2M}. \qquad (12)$$

В этой формуле учтено и то, что одна из площадей может быть равна нулю, и то, что указанные площади имеют одинаковые знаки в точности тогда, когда точки P_1 и P_2 лежат по одну сторону от прямой P_3P_4 (то есть когда векторы $\overrightarrow{P_1M}$ и $\overrightarrow{P_2M}$ сонаправлены). Мы нашли, в каком отношении делится этот отрезок точкой M (внутренним или внешним образом). С другой стороны, $\overrightarrow{P_2M} = \overrightarrow{P_1M} - \overrightarrow{P_1P_2}$. Подставим это соотношение в (12). Далее выразить $\overrightarrow{P_1M}$ — дело техники:

$$\overrightarrow{P_1M} = \frac{[\overrightarrow{P_3P_4}, \overrightarrow{P_3P_1}]}{[\overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}] - [\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}]}\overrightarrow{P_1P_2} = \qquad (13)$$

$$= \frac{[\overrightarrow{P_3P_4}, \overrightarrow{P_3P_1}]}{[\overrightarrow{P_3P_2} - \overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}]}\overrightarrow{P_1P_2} = \frac{[\overrightarrow{P_3P_4}, \overrightarrow{P_3P_1}]}{[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}]}\overrightarrow{P_1P_2}.$$

(Здесь мы использовали свойство линейности косого произведения: $[\overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}] - [\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}] = [\overrightarrow{P_3P_2} - \overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}]$, которое легко устанавливается, если записать это равенство в координатах.) Теперь, зная координаты точки P_1 и вектор $\overrightarrow{P_1M}$, находим точку M.

Таким образом, мы нашли точку пересечения прямой и отрезка. Для нахождения пересечения двух прямых на одной из них выбираются произвольные точки P_1 и P_2, на другой — P_3 и P_4.

Может быть, вывод (13) не совсем элементарен, но саму формулу легко запомнить, если понять ее геометрический смысл. Так, если отрезки P_1P_2 и P_3P_4 пересекаются, то площадь четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$ по известной формуле есть половина произведения диагоналей на синус угла между ними. То есть по абсолютной величине косое произведение векторов $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_3P_4}$, стоящее в знаменателе формулы (13), — это удвоенная площадь четырехугольника $P_1P_2P_3P_4$. В числителе же мы имеем удвоенную площадь треугольника $P_3P_4P_1$.

2.4. Определение взаимного расположения двух отрезков или лучей.

Проверить наличие пересечения у двух отрезков (а зачастую нас интересует лишь сам факт пересечения) несложно опять же с использованием косого произведения. Пусть первый отрезок задан точками P_1 и P_2, а второй — P_3 и P_4. Отрезки пересекаются тогда, когда, во-первых, пересекаются ограничивающие их прямоугольники и, во-вторых, концы каждого отрезка лежат по разные стороны от прямой, которой принадлежит другой отрезок. Первое из этих условий позволяет не рассматривать отдельно тот случай, когда отрезки лежат на одной прямой.

Обозначим x_{max1} и x_{min1} — максимальную и минимальную из x-координат первого отрезка, x_{max2} и x_{min2} — второго отрезка. Для y-координат имеем аналогично y_{max1}, y_{min1}, y_{max2} и y_{min2}. Тогда условия пересечения отрезков формально можно записать так:

1) $x_{max1} \ge x_{min2}$, $x_{max2} \ge x_{min1}$, $y_{max1} \ge y_{min2}$ и $y_{max2} \ge y_{min1}$;

2) косые произведения $[\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_2}]$ и $[\overrightarrow{P_1P_4}, \overrightarrow{P_1P_2}]$ имеют разный знак, точнее, $[\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_2}]\cdot[\overrightarrow{P_1P_4}, \overrightarrow{P_1P_2}] \le 0$;

3) аналогично $[\overrightarrow{P_3P_1}, \overrightarrow{P_3P_4}]\cdot[\overrightarrow{P_3P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}] \le 0$.

Если факт наличия пересечения нами уже установлен, то для отрезков, находящихся на пересекающихся прямых, точка пересечения ищется, как и в задаче 2.3. Для отрезков одной прямой их пересечение (точку или отрезок) можно найти путем подсчета значения двух скалярных произведений аналогично задаче 2.1 или с помощью сравнения координат концов отрезков.

Введем теперь понятие расстояния между двумя непересекающимися отрезками как минимальное среди расстояний между всеми парами точек двух отрезков. Несложно понять, что оно равно расстоянию от конца одного из отрезков до другого отрезка (задача 2.1). Поэтому для решения задачи достаточно подсчитать соответствующее расстояние для каждой из четырех концевых точек и выбрать из них минимальное.

Для проверки наличия пересечения двух лучей P_1P_2 и P_3P_4 следует изучить взаимное расположение соответствующих прямых. Равенство нулю косого произведения $[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}]$ означает принадлежность лучей параллельным прямым. Если эти прямые различны, то векторы $\overrightarrow{P_1P_3}$ и $\overrightarrow{P_1P_2}$ неколлинеарны и, значит, косое произведение $[\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_2}]$ отлично от нуля. В этом случае лучи не пересекаются. Когда лучи лежат на одной прямой, с помощью знака скалярного произведения $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_4})$ можно понять, в одну или в разные стороны они направлены. В первом случае скалярное произведение будет положительным, а во втором — отрицательным. Если лучи сонаправлены, то определить, какой из лучей является их пересечением, можно, подсчитав значение скалярного произведения $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3})$. Когда оно больше нуля, пересечением является луч P_3P_4, в противном случае — луч P_1P_2. В случае же противоположной направленности лучей их пересечение — либо отрезок P_1P_3, и тогда начало любого из двух лучей лежит внутри другого луча: $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) > 0$, либо одна точка $P_1 = P_3$: $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) = 0$, либо оно пусто: $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}) < 0$.

Наконец, если прямые P_1P_2 и P_3P_4 пересекаются в одной точке M ($[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_3P_4}] \neq 0$), то найти эту точку можно так же, как в задаче 2.3. Затем следует проверить, что M принадлежит каждому из лучей: $(\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1M}) \geq 0$ и $(\overrightarrow{P_3P_4}, \overrightarrow{P_3M}) \geq 0$.

2.5. Взаимное расположение окружности и прямой.

Прямая может пересекать окружность в двух точках, касаться ее или не иметь с окружностью общих точек. Эти случаи легко определяются. Достаточно найти расстояние от центра окружности до данной прямой (по формуле расстояния от точки до прямой, см. 2.1). Если это расстояние (обозначим его l) меньше радиуса окружности r, то прямая пересекает окружность в двух точках, если равно ему, то прямая касается окружности, а если оно больше радиуса, то общих точек нет. В последнем случае нас может интересовать и расстояние от прямой до окружности. Оно равно $l - r$.

Более сложной является задача поиска общих точек прямой и окружности. Случай касания был рассмотрен нами в п. 1.7. Пусть теперь прямая и окружность пересекаются в двух точках. Координаты этих точек можно найти по следующему алгоритму (*рис.* 10). Найдем вектор n нормали к прямой. Отложим в направлении этого вектора вектор $\overrightarrow{OA}$ длины l. Вычислим расстояние $|AP_1| = |AP_2| = \sqrt{r^2 - l^2}$. От точки A вдоль прямой отложим в обе стороны векторы длины $|AP_1|$. Их концы дадут нам две искомые точки — P_1 и P_2. Каждый из шагов этого алгоритма в отдельности нами уже рассматривался ранее. Заметим только, что на первом шаге необходимо правильно выбрать одно из двух возможных направлений нормали к прямой. Для этого достаточно проверить, что скалярное произведение $(\boldsymbol{n}, \overrightarrow{OM}) \geq 0$, где M — произвольная точка прямой.

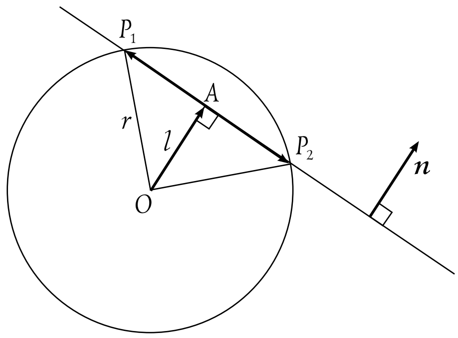

***Рис.* 10**

2.6. Взаимное расположение двух окружностей.

Две различные окружности также могут пересекаться в двух точках, касаться друг друга или не иметь общих точек. В последнем случае одна из окружностей может располагаться внутри другой (назовем такие окружности вложенными) или каждая из окружностей лежит вне другой.

Проверка наличия пересечения или касания аналогично предыдущей задаче осуществляется путем сравнения расстояния между центрами окружностей (обозначим его l) с их радиусами. Если $l > r_1 + r_2$ или $l < |r_1 - r_2|$, то окружности общих точек не имеют. Второе условие обозначает вложенность одной окружности в другую. При замене знака любого из этих двух неравенств на равенство мы получим случай касания окружностей (внешнего или внутреннего). Если же $|r_1 - r_2| < l < r_1 + r_2$, то окружности имеют ровно две точки пересечения.

Координаты точки касания окружностей найти очень просто. Ведь центры окружностей $O_1(x_1, y_1)$ и $O_2(x_2, y_2)$ задают прямую, на которой лежит и точка касания $P(x_3, y_3)$. Будем считать, что точка O_1 является центром окружности большего радиуса. Тогда вектор $\overrightarrow{O_1P}$ сонаправлен с вектором $\overrightarrow{O_1O_2}$. Длины обоих векторов также известны, поэтому искомые координаты равны $\left(\frac{x_1 + (x_2 - x_1)r_1}{l}, \frac{y_1 + (y_2 - y_1)r_1}{l}\right)$. Проверьте, что если $r_1 < r_2$, то в случае вложенности окружностей полученная формула нуждается в корректировке.

При поиске координат двух точек пересечения окружностей воспользуемся механизмом, уже описанным в задаче 1.7. Рассмотрим треугольник O_1O_2P (*рис.* 11). В нем нам известны длины всех трех сторон ($r_1 > r_2$ и l). Проведем в треугольнике высоту PH. В получившемся прямоугольном треугольнике O_1HP неизвестны длины катетов. Найдем O_1H, записав теорему косинусов для треугольника O_1O_2P: $r_2^2 = r_1^2 + l^2 - 2lr_1 \cdot \cos\varphi = r_1^2 + l^2 - 2l \cdot |O_1H|$. Отсюда $|O_1H| = \frac{(r_1^2 + l^2 - r_2^2)}{2l}$.

По теореме Пифагора $|HP| = \sqrt{r_1^2 - |OH_1|^2}$. Теперь последовательно находим: вектор $\overrightarrow{O_1H} = \frac{|O_1H|}{l}\overrightarrow{O_1O_2}$, точку H по известной точке O_1 и вектору $\overrightarrow{O_1H}$, вектор $\boldsymbol{n} = (y_2 - y_1, x_1 - x_2)$, перпендикулярный O_1O_2, вектор $\overrightarrow{HP} = \frac{|HP|}{|\boldsymbol{n}|}\boldsymbol{n}$, наконец, точку P по известной точке H и вектору $\overrightarrow{HP}$. Заменив в последнем действии вектор $\overrightarrow{HP}$ на противоположный, получим и вторую точку пересечения окружностей.

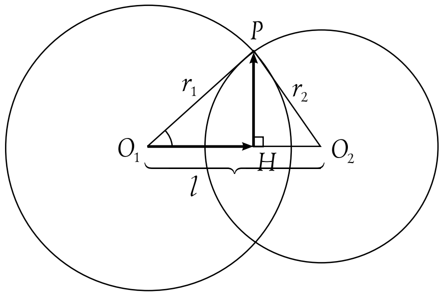

Рис. 11

Заметим, что при решении задач 1.7, 2.5 и 2.6 мы используем “пошаговые” алгоритмы. А именно, анализируя чертеж, выделяем цепочку объектов (векторов, точек и т.п.), каждый из которых за один элементарный шаг получается из уже найденных объектов. Фактически мы последовательно восстанавливаем параметры объектов, выделенных нами на чертеже. Цепочка вычислений должна привести нас к ответу, при этом каждый шаг предельно прост и вполне очевиден. Не исключено, что у задачи имеется более короткое аналитическое решение (например, решение системы уравнений). Однако “пошаговый” метод в силу своей наглядности прозрачен и позволяет контролировать каждый шаг решения, а именно это качество может сыграть решающую роль при проверке алгоритма и отладке программы.

2.7. Проверка принадлежности точки внутренней области многоугольника.

Пусть M — некоторая точка плоскости. Требуется определить ее местонахождение относительно замкнутой ломаной, являющейся границей многоугольника. Рассмотрим сначала случай выпуклого многоугольника. Пусть заданные своими координатами вершины многоугольника $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ перечислены в порядке его обхода против часовой стрелки. При таком обходе многоугольник лежит слева от границы. И, значит, если точка M лежит внутри многоугольника, то ориентированный угол между векторами $\overrightarrow{P_iM}$ и $\overrightarrow{P_iP_{i+1}}$ отрицателен. Поэтому нам достаточно подсчитать величину косых произведений $[\overrightarrow{P_iM}, \overrightarrow{P_iP_{i+1}}]$, $i = 0, 1, \ldots, n - 1$; значение $i + 1$ берется по модулю n. Если все полученные при этом значения отрицательны, то точка M внутренняя. Если же одно из них равно нулю, а все остальные отрицательны, то M принадлежит границе многоугольника (убедитесь, что просто равенства нулю одного из значений не достаточно). В противном же случае точка M лежит вне нашего многоугольника.

Рассмотрим теперь произвольный многоугольник. Проведем горизонтальный луч из точки M, например, влево. Так как многоугольник ограничен, то всегда легко указать на этом луче точку $P(x, y)$, заведомо ему не принадлежащую. Далее подсчитаем количество пересечений отрезка PM с границей многоугольника. Если оно равно нулю или четно, то точка M лежит вне многоугольника, в противном случае — внутри него.

Количество пересечений отрезка PM с границей мы подсчитаем, рассмотрев по очереди пересечение отрезка PM с каждым из звеньев ломаной. При этом возможны следующие особые случаи.

1. Одно из звеньев ломаной целиком содержится внутри отрезка PM.
2. Звено ломаной касается отрезка PM.
3. M лежит на одном из звеньев ломаной.

В последнем случае M принадлежит границе многоугольника, и в подсчете общего числа пересечений необходимости нет. Для двух первых случаев поступим следующим образом. В первом случае пересечение будем игнорировать. Во втором — дополнительно проверим, “нижним” или “верхним” концом звено ломаной касается горизонтального отрезка PM. Если точкой касания является “нижний” конец звена, то пересечение игнорируется, а если “верхний” — то засчитывается. С учетом этого соглашения касание отрезка PM границы многоугольника в одних точках игнорируется, а в других точках считается дважды. Это не изменит четности числа пересечений, а только она важна при поиске ответа на вопрос данной задачи. Если же отрезок действительно пересекает ломаную в ее вершине, то, по нашему соглашению, число пересечений как раз увеличится на единицу (пересечение с верхним ребром засчитано не будет, а с нижним — будет). Например, на *рис.* 12 количество пересечений для верхней из исследуемых точек будет равно четырем (касание засчитано дважды), а для нижней точки — трем (касание не учтено, а пересечение в вершине ломаной учтено один раз).

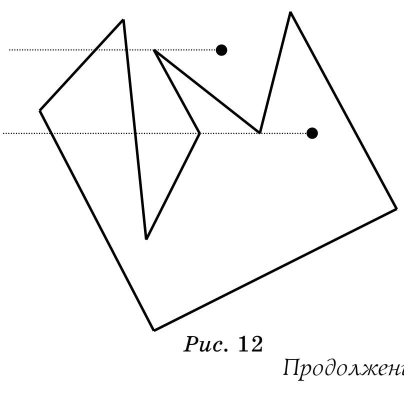

Рис. 12

Продолжение см. в № 41