Вычислительная геометрия на плоскости

Е.В. Андреева, Ю.Е. Егоров,
Москва

Продолжение. См. № 39, 40/2002

Особые точки многоугольников и множеств N точек плоскости

3.1. Построение окружности, описанной около треугольника или правильного N-угольника.

Пусть треугольник или правильный N-угольник задан координатами своих вершин. Для решения задачи нам достаточно найти координаты центра окружности, тогда ее радиус R будет выражаться через координаты центра и координаты любой из вершин. Тем не менее заметим, что сама по себе задача нахождения радиуса такой окружности для треугольника $P_1P_2P_3$ довольно проста и основана на сопоставлении двух формул для площади треугольника: $S = \dfrac{|[\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3}]|}{2} = \dfrac{|P_1P_2|\cdot|P_1P_3|\cdot|P_2P_3|}{4R}$. Напомним, что первый из этих способов следует из геометрического смысла косого произведения.

Из курса геометрии известно, что центр описанной около треугольника окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров к сторонам треугольника. Координаты середины стороны треугольника представляют собой среднее арифметическое координат соответствующих вершин. Тогда задача нахождения уравнения серединного перпендикуляра совпадает с задачей 1.3 и по формуле (7) мы имеем

$$(x_2 - x_1)(x - \frac{x_1 + x_2}{2}) + (y_2 - y_1)(y - \frac{y_1 + y_2}{2}) = 0,$$

где (x_i, y_i) — координаты точки P_i. Для нахождения центра искомой окружности теперь достаточно выписать уравнение еще одного серединного перпендикуляра (например, к отрезку P_1P_3) и найти заведомо существующую точку пересечения этих двух прямых.

Очевидно, что для правильного многоугольника решение может вообще ничем не отличаться от приведенного выше. Причем достаточно выписать уравнение двух любых несовпадающих серединных перпендикуляров. Ведь именно пересечение всех серединных перпендикуляров к его сторонам в одной и той же точке позволяет описать окружность около правильного N-угольника. Но есть способ лучше ☺. В случае четного N центр правильного N-угольника — это середина диагонали, проведенной, например, из первой вершины в $(\frac{N}{2}+1)$-ю, то есть его координаты представляют собой среднее арифметическое координат указанных вершин. При нечетном значении N центр лежит на прямой, соединяющей одну из вершин с серединой наиболее удаленной стороны, на расстоянии $R = \dfrac{a}{2\sin(\frac{\pi}{N})}$ от вершины, где a — длина стороны правильного N-угольника.

Заметим, что в правильном многоугольнике центр описанной окружности совпадает с центром единичных масс, помещенных в его вершины. Поэтому его положение можно также определить по формулам (15), см. 3.7.

3.2. Построение окружности, вписанной в треугольник или правильный N-угольник.

Как и в предыдущей задаче, радиус r такой окружности для треугольника легко найти из сопоставления формул для вычисления площади треугольника:

$$S = \frac{|[\overrightarrow{P_1P_2},\ \overrightarrow{P_1P_3}]|}{2} = r\frac{|P_1P_2| + |P_1P_3| + |P_2P_3|}{2}.$$

Центр вписанной в треугольник окружности лежит на пересечении биссектрис его углов. Для нахождения его координат достаточно выписать уравнения любых двух биссектрис (см. задачу 1.5) и найти точку их пересечения.

Центр же окружности, вписанной в правильный многоугольник, совпадает с центром его описанной окружности, а ее радиус равен расстоянию от центра до любой из сторон. Как и в случае описанной окружности, искомый радиус можно вычислить сразу, не находя центра, по формуле $r = \dfrac{a}{2\mathrm{tg}(\frac{\pi}{N})}$.

3.3. Окружность, “охватывающая” N точек плоскости.

Эта задача состоит в отыскании координат центра окружности минимально возможного радиуса, внутри которой находятся все заданные точки. Иногда эту проблему называют минимаксной задачей “о культурном центре”. В ней требуется по координатам домов в городе подобрать место для строительства культурного центра так, чтобы расстояние до максимально удаленного от него дома было минимальным. Для того чтобы понять решение этой задачи в общем случае, рассмотрим сначала “треугольный” вариант: $N = 3$.

Даже для трех точек вид решения существенно зависит от их взаимного расположения. Пусть точки лежат на одной прямой или образуют тупоугольный треугольник. Тогда искомая точка лежит на середине отрезка, соединяющего наиболее удаленные друг от друга точки (в середине наибольшей стороны тупоугольного треугольника). В самом деле, расстояние от этой точки до любой из первых двух уменьшить нельзя, а третья точка находится на меньшем расстоянии от найденной точки, следовательно, она лежит внутри окружности, диаметр которой образуют две другие точки. А для остроугольного треугольника решением является центр описанной вокруг него окружности (смещение искомой точки от него в любом направлении приведет к увеличению расстояния хотя бы до одной из точек). Способ его нахождения был показан в задаче 3.1. Прямоугольный треугольник является "пограничным" для этих двух случаев, то есть для него искомую точку можно находить любым из описанных способов (конечно, первый способ вычислительно более простой).

Для произвольного N также есть два случая. Если найдутся две такие точки, что окружность, построенная на соединяющем их отрезке, как на диаметре, содержит все остальные точки (то есть для них выполняется неравенство $(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 \le r^2$, где (x_0, y_0) — центр окружности), то эта окружность — искомая (фактически это случай "тупоугольного треугольника"). Если же такой пары точек не нашлось, то искомая окружность заведомо проходит хотя бы через три из исходных точек. Поэтому теперь необходимо перебирать все тройки точек до тех пор, пока не найдется такая тройка, что проходящая через эти точки окружность будет заключать внутри себя все остальные точки (случай "остроугольного треугольника").

После того как суть решения стала понятной, можно задуматься над тем, как сделать его эффективным. Так, в [1] показано, что две наиболее удаленные друг от друга точки можно найти методом "разделяй и властвуй" за $O(N\log N)$ операций сравнения. В [4] утверждается, что и решение задачи в целом будет иметь ту же самую оценку сложности.

3.4. Наибольшая "пустая" окружность с центром внутри многоугольника, содержащего N точек.

Эту задачу можно интерпретировать как максиминную задачу "о химическом заводе". А именно, в черте города, граница которого известна, а дома заданы своими координатами, требуется выбрать место для строительства химического завода так, чтобы расстояние от него до ближайшего дома было максимальным. Фактически нам требуется найти окружность максимального радиуса, не содержащую внутри себя точки исходного множества, центр которой лежит внутри или на заданной ломаной.

Возможны три случая расположения центра искомой окружности. Сначала предположим, что он лежит внутри ломаной. Тогда окружность обязательно проходит через три точки заданного множества, иначе, очевидно, нашлась бы "пустая" окружность и большего радиуса. Поэтому переберем все неколлинеарные тройки точек и для каждой тройки рассмотрим проходящую через эти точки окружность. Из этих окружностей выберем те, центр которых лежит внутри ломаной и которые не содержат других точек. Найдем среди них окружность максимального радиуса (обозначим его r_1). Во втором случае центр искомой окружности лежит на ломаной, но не совпадает с ее вершиной. Если искомая окружность такова, то она однозначно определяется уже парой точек. Центры таких окружностей лежат на пересечении ломаной с серединным перпендикуляром к отрезку, соединяющему две точки (*рис.* 13). Обозначим максимальный радиус "пустых" окружностей этого вида r_2. Наконец, если центр искомой окружности совпадает с одной из вершин ломаной, то ее радиус будет определяться расстоянием до ближайшей к вершине точке (максимальный из таких радиусов — r_3). Ответом на нашу задачу будет являться одна из трех найденных окружностей, радиус которой есть $\max(r_1, r_2, r_3)$. В [4] указано, что поиск решения можно осуществить за $O(N\log N)$ операций.

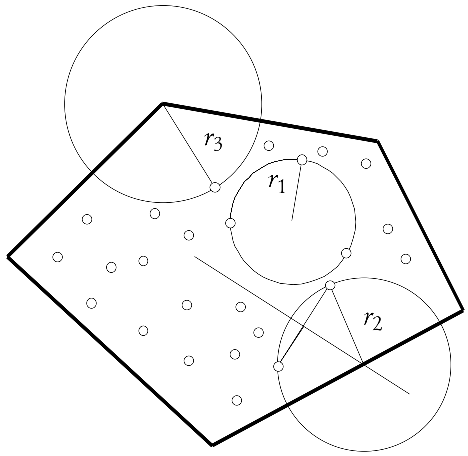

Рис. 13

Наш алгоритм имеет приемлемую вычислительную сложность, однако при его реализации приходится использовать решения сразу нескольких элементарных задач, рассмотренных выше. Как правило, для школьника полное решение оказывается слишком трудоемким. Поэтому покажем и приближенный (численный) метод решения этой задачи, слегка упростив ее. Воспользуемся идеями, изложенными в [5] при решении задачи "Фонтан". Предположим, что граничная ломаная представляет собой прямоугольник, левый нижний угол которого расположен в начале координат, а координаты правого верхнего (x_r, y_r) соответствуют длине и ширине прямоугольника. Это упрощение не уменьшает общности, поскольку каждый многоугольник можно заключить в прямоугольник и решить задачу для этого прямоугольника. Центры окружностей, лежащие вне заданного многоугольника, при этом следует из рассмотрения исключать.

Пусть мы хотим найти "пустую" окружность радиуса r. Тогда, чтобы проверить, что мы можем это сделать, проделаем следующую операцию: построим круги радиуса r с центрами в каждой из точек. Если эти круги покрывают прямоугольник полностью, то очевидно, что "пустой" окружности указанного радиуса r не существует. Любая же не покрытая такими кругами точка прямоугольника может служить центром "пустой" окружности. Этот прием в геометрии называют методом "раздутия". Мы свели первоначальную задачу к другой: задаче о покрытии.

3.5. Задача о покрытии.

Предположим, мы хотим проверить, что некоторый прямоугольник полностью покрывается заданным множеством кругов. Если все четыре его вершины покрываются одним кругом, то, очевидно, прямоугольник покрывается кругами полностью. В противном случае разобьем прямоугольник на четыре одинаковых прямоугольника и рекурсивно проверим, что каждый из них покрывается кругами. Для этого прямоугольники, не содержащиеся целиком внутри какого-либо одного круга, вновь будем делить на четыре равные части. Исключение составит случай, при котором вершина рассматриваемого прямоугольника оказывается вне всех кругов, т.е. является примером непокрытой точки. Будем продолжать разбиение, пока сторона прямоугольника не станет меньше некоторой заданной достаточно маленькой величины. Тогда предполагаем, что этот прямоугольник полностью кругами не покрывается, а его центр будем считать непокрытой точкой.

Рекурсивная функция check, выполняющая соответствующую проверку, приведена ниже.

```
const
  eps1 = 1e-6; {точность поиска непокрытой точки}
  eps2 = 1e-5; {точность поиска радиуса}
var fx, fy: real;
    {координаты центра пустой окружности}
  xr, yr: real; {размер прямоугольника}
  lb, rb, r: real; {r — искомый радиус}
function dist2(x1, y1, x2, y2:real): real;
{вычисляет квадрат расстояния между двумя точками}
begin
  dist2 := sqr(x1 - x2) + sqr(y1 - y2)
end;
function check(x1, y1, x2, y2:real): boolean;
{проверяет, что прямоугольник покрыт
 заданным множеством кругов;
 параметры — координаты левого верхнего и
 правого нижнего углов прямоугольника}
var i: longint;
  d1, d2, d3, d4, c1, c2, c3, c4: boolean;
begin
  if (abs(x1 - x2) < eps1) and
     (abs(y1 - y2) < eps1) then
   begin
  {центр прямоугольника — непокрытая точка}
     fx := (x1 + x2)/2;
     fy := (y1 + y2)/2;
     check := false; exit
  end;
  check := true;
  c1 := true; c2 := true;
  c3 := true; c4 := true;
 {проверяем покрытие одним кругом}
  for i := 1 to n do
   begin
    d1 := dist2(x1, y1, x[i], y[i]) <= r * r);
    d2 := dist2(x1, y2, x[i], y[i]) <= r * r);
    d3 := dist2(x2, y1, x[i], y[i]) <= r * r);
    d4 := dist2(x2, y2, x[i], y[i]) <= r * r);
    if d1 and d2 and d3 and d4 then
      begin
        check := true; exit
      end;
     c1 := c1 and not d1;
     c2 := c2 and not d2;
     c3 := c3 and not d3;
     c4 := c4 and not d4
   end;
  if c1 then {точка x1,y1 не покрыта}
   begin
     fx := x1; fy := y1;
     check := false; exit
   end;
  if c2 then {точка x1,y2 не покрыта}
   begin
     fx := x1; fy := y2;
     check := false; exit
   end;
  if c3 then {точка x2,y1 не покрыта}
   begin
     fx := x2; fy := y1;
     check := false; exit
   end;
  if c4 then {точка x2,y2 не покрыта}
   begin
     fx := x2; fy := y2;
     check := false; exit
   end;
  check := check(x1,y1,(x1 + x2)/2,(y1 + y2)/2) and
           check((x1 + x2)/2,y1,x2,(y1 + y2)/2) and
           check(x1,(y1 + y2)/2,(x1 + x2)/2,y2) and
           check((x1 + x2)/2,(y1 + y2)/2,x2,y2)
end;
```

Теперь мы легко можем решить и задачу о "пустой" окружности максимального радиуса. С помощью функции check искомый радиус окружности также можно найти численно алгоритмом деления пополам (дихотомией):

```
lb := 0; {левая граница}
if xr < yr then rb := xr/2
           else rb := yr/2; {правая граница}
while abs(lb - rb) > eps2 do
 begin
   r := (lb + rb)/2;
   if check(r, 0, 0, xr, yr) then rb := m
                             else lb := m
 end;
writeln(fx:0:4, ' ', fy:0:4, ' ', r:0:4);
```

Таким несложным способом задачу можно решить почти с любой наперед заданной точностью.

3.6. Кратчайшая сеть дорог.

Заданы N населенных пунктов (точек на плоскости). Необходимо так проложить между ними дороги, чтобы по этим дорогам возможно было проехать из любого пункта в любой другой, а суммарная длина дорог была минимальна. В отличие от похожей задачи построения минимального остова в теории графов в этой задаче мы не ограничены отрезками прямых, соединяющих заданные точки. При необходимости мы можем построить в произвольных местах плоскости новые точки пересечения участков дорог (так, для четырех точек, расположенных в вершинах квадрата, система дорог, составленная из двух диагоналей этого квадрата, предпочтительнее любого основного дерева, но и она не является оптимальной, см. на *рис.* 14 решения для прямоугольника.

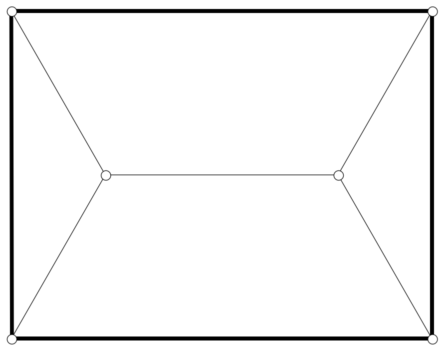

Рис. 14

Рассмотрим решение задачи для $N = 3$ (населенные пункты лежат в вершинах треугольника ABC).

Несложно понять, что в этом случае задача сводится к поиску точки, сумма расстояний от которой до всех вершин треугольника минимальна, и что такая точка должна лежать внутри или на стороне треугольника ABC. Будем предполагать, что каждый из углов треугольника ABC не превосходит 120°. Пусть D — произвольная точка. Рассмотрим треугольник $BC'D'$, полученный поворотом треугольника BCD вокруг точки B на 60° (*рис.* 15). В силу построения $DC = D'C'$ и $DD' = BD$ (треугольник BDD' — равносторонний). Поэтому искомая сумма расстояний для точки D равна $AD + BD + CD = AD + DD' + D'C'$ и, значит, нам нужно найти такую точку D, для которой длина ломаной $ADD'C'$ минимальна. Если в качестве точки D мы выберем точку S, показанную на *рис.* 15 ($\angle AC'B = \angle SCB$), то после поворота вокруг B на 60° она попадет на отрезок $C'S$. Таким образом, длина $ASS'C'$ окажется равной AC', что, конечно же, не больше длины любой другой ломаной $ADD'C'$. Значит, S и есть искомая точка. Она называется “точкой Штейнера”. Заметим, что угол CSA равен 120°, так как луч CS переходит в луч $C'A$ при повороте на 60°. Понятно, что и две другие стороны треугольника должны быть видны из точки S под углом 120°.

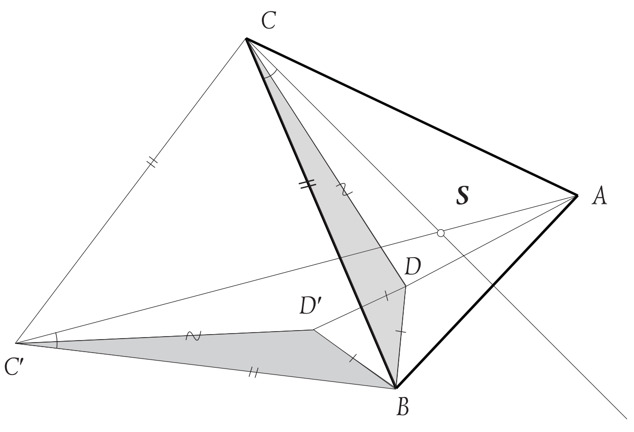

Рис. 15

Из проведенного анализа следует и способ построения точки Штейнера (*рис.* 16). Сначала ищем точки B' и C' как вершины равносторонних треугольников ABB' и BCC', построенные вне треугольника ABC. Поиск их координат производится с помощью вектора нормали, приложенного к середине соответствующей стороны треугольника (искомая точка находится на расстоянии $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ от середины стороны исходного треугольника, где a — длина соответствующей стороны). Остается определить точку S пересечения отрезков CB' и AC' (см. 2.3).

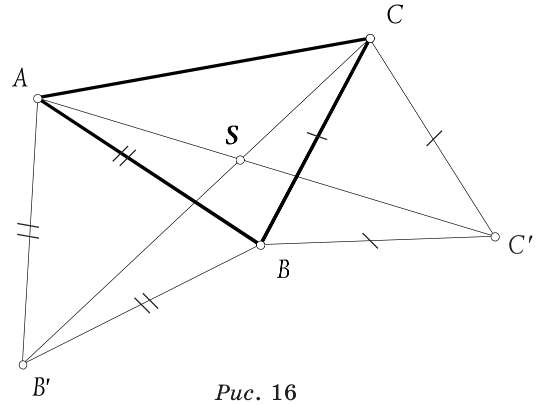

Рис. 16

Для треугольников, у которых один из углов больше 120° (в том числе выродившихся в отрезок), предложенное нами построение не годится. Действительно, в таком треугольнике нет точки, из которой бы все три стороны были видны под углом 120°. В этом случае решение задачи будет представлять собой систему из двух наименьших сторон треугольника.

Задача о минимальной сети дорог рассмотрена в прекрасной книге [3]. На *рис.* 14 показано решение этой задачи для четырех точек, расположенных в вершинах прямоугольника. Для произвольных N точек задача о кратчайшей сети дорог не решена. Поэтому поиск минимальной транспортной сети осуществляется с использованием компьютера. Однако все известные на сегодня алгоритмы позволяют построить решение лишь при небольших значениях N.

3.7. Центр масс.

В некоторых задачах геометрии очень полезным оказывается применение центра масс. Пусть на плоскости есть система материальных точек $A_1, A_2, \ldots, A_N$, имеющих массы $m_1, m_2, \ldots, m_N$ соответственно. Будем считать, что массы — неотрицательные числа (иногда допускают отрицательные или даже комплексные массы). Центром масс такой системы материальных точек называется точка M, для которой

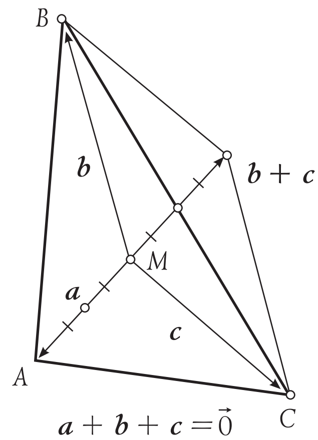

Рис. 17

$$m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + m_N\overrightarrow{MA_N} = \vec{0}. \qquad (14)$$

Простой пример: точка пересечения медиан в треугольнике является центром трех равных масс, помещенных в вершинах этого треугольника. Это следует из теоремы о медианах (*рис.* 17).

Вернемся к N точкам. Пусть O — произвольная точка плоскости. Используя определение точки M, получим

$$m_1\overrightarrow{OA_1} + m_2\overrightarrow{OA_2} + \ldots + m_N\overrightarrow{OA_N} =$$
$$= m_1(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_1}) + m_2(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_2}) + \ldots +$$
$$+ m_N(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA_N}) = (m_1 + m_2 + \ldots + m_N)\overrightarrow{OM} +$$
$$+ m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + \ldots + m_N\overrightarrow{MA_N} =$$
$$= (m_1 + m_2 + \ldots + m_N)\overrightarrow{OM}.$$

В качестве точки O можно взять начало координат. Тогда найдем координаты точки M:

$$x_M = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_Nx_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N},$$
$$y_M = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + \ldots + m_Ny_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N}, \qquad (15)$$

— где (x_i, y_i) — координаты A_i.

Применение центра масс основывается на его определении (14). Проиллюстрируем это на одном примере. На кировской командной олимпиаде в 2000 г. предлагалось решить следующую задачу (приведем ее в упрощенной формулировке).

Задача "Сеть"

Губернатор одной из областей заключил с фирмой "*HerNet*" контракт на подключение всех городов области к компьютерной сети. Сеть создается следующим образом: в области устанавливается станция спутниковой связи, и затем от каждого города прокладывается кабель до станции. Технология, используемая компанией, во избежание накопления ошибок требует при увеличении расстояния увеличения толщины кабеля. Стоимость кабеля, соединяющего город со станцией, при используемой компанией технологии будет равна kL^2, где L — расстояние от города до станции, а k — некий коэффициент. Требуется определить положение станции, при котором затраты компании на установку сети минимальны.

Поместим в каждый город массу k, и пусть M — центр масс полученной системы равных точечных масс. Если станцию установить в точке P, то стоимость s всего кабеля вычисляется так:

$$s = \sum k\,|\overline{PA_i}|^2 = k\sum(\overline{PM} + \overline{MA_i},\ \overline{PM} + \overline{MA_i}) =$$
$$= k\sum|\overline{PM}|^2 + k\sum(\overline{PM},\ \overline{MA_i}) + k\sum|\overline{MA_i}|^2 =$$
$$= k\sum|\overline{PM}|^2 + (\overline{PM},\ k\sum\overline{MA_i}) + k\sum|\overline{MA_i}|^2 =$$
$$= k\sum|\overline{PM}|^2 + k\sum|\overline{PA_i}|^2.$$

Очевидно, величина s минимальна, когда $\overrightarrow{PM} = \vec{0}$, т.е. когда станция находится в центре масс. Значит, координаты искомой точки вычисляются по формуле (15): $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N}, \dfrac{y_1 + y_2 + \ldots + y_N}{N}\right)$. Более того, можно представить себе, что по какой-либо причине коэффициент k зависит от местности и является своим для каждого города. Наше решение легко адаптируется к этому: нужно поместить в каждый город массу, равную соответствующему коэффициенту. Та же выкладка показывает, что станцию следует ставить в центре масс получившейся системы материальных точек.

Окончание следует

Калейдоскоп

МУХА-РОБОТ...

На протяжении трех с половиной лет Рон Фиеринг, профессор университета в г. Беркли (США), разрабатывает миниатюрную механическую муху, в создании которой заинтересованы как военные ведомства США, так и медицина. Эту муху-робота можно с полным правом назвать миниатюрной — размах крыльев составляет всего 25 мм. В будущем железная муха будет способна копировать поведение обычной комнатной мухи, жужжа и маневрируя в воздухе. Пока же ученым удалось создать полетный модуль с ограниченными летательными способностями.

Тело мухи-робота строится из тонкой нержавеющей стали, и процесс его формирования напоминает японскую технику оригами. Разработчики берут плоскую стальную пластину и делают на ней лазером надрезы нужной формы и размеров. Затем пластина сворачивается и превращается в полую структуру, состоящую из множества тончайших пластинок из нержавеющей стали.

Источником питания, который позволит мухе-роботу самостоятельно перемещаться в пространстве, будут литиевые батарейки или даже панели солнечных элементов. "Сердцем" робота станет мотор из пьезоэлектрических материалов. Маленькие керамические кристаллы, на которые подается высокое напряжение, дадут возможность крыльям двигаться.

Заказчиком проекта выступил отдел исследований военно-морского флота, чьи специалисты заинтересованы в использовании мухи-робота в военных целях — для наблюдения, слежения и т.п. Кроме того, разработчики считают возможным использовать стальную муху как основу для создания роботов-хирургов, применяемых в медицине: размеры робота не превышают в диаметре 5 мм, что позволяет проводить операции внутри человеческого тела.

По материалам журнала "ПЛ: Компьютеры"

...И НАСТОЯЩИЙ ТАРАКАН

Группа японских ученых "оборудовала" живого таракана электроникой. На насекомом смонтированы малюсенькая фотокамера и микрофон, весящие в два раза больше, чем он. Чтобы установить такое оборудование, у таракана удалили усики и крылья.

Зачем же было создавать это чудо техники? Дело в том, что таракан исключительно живучее и выносливое насекомое, которому не страшны ни радиация, ни яды, да и еды ему практически не требуется. Эти уникальные возможности можно использовать с целью поиска людей под завалами и для "шпионских" нужд. В любом случае таракан теперь может стать помощником человека.

По материалам журнала "Мир ПК"