

Принцип Дирихле, математическая индукция

Задача 1. Доказать, что любой из квадратов 2×2 , 4×4 , 8×8 , $\dots$, $2^n \times 2^n$, $\dots$, из которого вырезан угловой квадратик 1×1 , можно разрезать на уголки из трёх клеток.

Задача 2. Доказать, что

$$1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

при всех $n \geq 1$.

Задача 3. В последовательности Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

каждый следующий член равен сумме двух предыдущих. Докажите, что два делящихся на 7 числа в ней не могут стоять рядом.

Задача 4. Сто человек сидят за круглым столом, причём более половины из них — мужчины. Докажите, что какие-то двое из мужчин сидят друг напротив друга.

Задача 5. Доказать, что никакая обыкновенная дробь (отношение двух целых положительных чисел) не может в квадрате быть равна 2.

(Как говорят, число $\sqrt{2}$ *иррационально*, то есть не представимо в виде дроби с целым числителем и знаменателем.)

Задача 6. На плоскости проведено 7 прямых, никакие две из которых не параллельны. Докажите, что найдутся две из них, угол между которыми меньше 26 градусов.

Задача 7. Плоскость разрезана на части n прямыми, причём $n \geq 3$ и не все прямые проходят через одну точку. Доказать, что хотя бы одна из частей — треугольник.

Задача 8. На сколько частей делят плоскость n прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

Задача 9. Доказать, что квадрат можно разрезать на n квадратов (возможно, разных размеров) при любом $n \geq 6$.