Теория чисел

Латинскими буквами обозначаются *целые* числа.

Число a *делится* на ненулевое число b, если существует такое k, что $a = kb$. Обозначение: $b \backslash a$. В этом случае b называется *делителем* числа a, и говорят, что *a кратно b*.

1. Какие из следующих утверждений верны для любых n, a, b?
(а) $2 \backslash (n^2 - n)$;
(б) $4 \backslash (n^4 - n)$;
(в) если $c \backslash a$ и $c \backslash b$, то $c \backslash (a + b)$;
(г) если $b \backslash a$, то $bc \backslash ac$ для любого c;
(д) если $bc \backslash ac$ для некоторого c, то $b \backslash a$.

2. (а) Сформулируйте и докажите признаки делимости на 2, 4, 5, 10, 3, 9.
Указание. $5678 = 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$.
(б) Делится ли число $11 \ldots 1$ из 1993 единиц на 111111?
(в) Число $1 \ldots 1$ (2001 единиц) делится на 37.

3. (а) Если k не кратно ни 2, ни 3, ни 5, то $k^4 - 1$ кратно 240.
(б) Если $a + b + c$ делится на 30, то и $a^5 + b^5 + c^5$ делится на 30.

Наибольшее число, делящее и a, и b, называется *наибольшим общим делителем* чисел a и b и обозначается НОД(a, b) (предполагается, что числа a и b не равны нулю одновременно).

Числа a и b называются *взаимно простыми*, если НОД(a, b)$= 1$.

4. Найдите все возможные значения

(а) НОД(n, 12); (б) НОД(n, $n + 1$); (в) НОД(n, $n + 6$);
(г) НОД($2n + 3$, $7n + 6$); (д) НОД(n^2, $n + 1$).

5. (а) Для любых двух чисел a и b НОД(a, b) существует и единствен.
(б) НОД(a, b)$= b$ тогда и только тогда, когда a делится на b.
(в) НОД(a, b) делится на любой общий делитель a и b.
(г) НОД(ca, cb) $= c \cdot$ НОД(a, b) при $c > 0$.
(д) $\frac{a}{\text{НОД}(a,\, b)}$ и $\frac{b}{\text{НОД}(a,\, b)}$ взаимно просты.

Число $p > 1$ называется *простым*, если оно не имеет положительных делителей, кроме p и 1.

6. (а) Найдите все такие p, что p, $p + 2$, $p + 4$ простые.
(б) Если $111 \ldots 11$ (n единиц) простое, то n простое. Обратное неверно.

7 (Каноническое разложение). Для любого натурального n найдутся такие различные простые $p_1, \ldots, p_m$ и натуральные $a_1, \ldots, a_m$, что $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{a_m}$. Пример: $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

8. Пусть $n = p_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot p_m^{a_m}$ — каноническое разложение. Найдите
(а) количество $\alpha(n)$ натуральных делителей числа n (как функцию от $p_1, \ldots, p_m, a_1, \ldots, a_m$);
(б) сумму $s(n)$ натуральных делителей числа n.