

Теория графов

Пусть задано некоторое конечное множество объектов или элементов, некоторые из которых попарно связаны между собой. Тогда данное множество элементов, а также весь набор связей между этими элементами называется *графом*. В этом случае данные объекты или элементы называются *вершинами графа*, а связи между ними — *рёбрами графа*. Вершины, связанные ребром, называются *концами этого ребра*. Такие вершины называются *смежными*.

Формальнее: граф G — это упорядоченная пара (V, E) , где V — конечное множество, называемое множеством вершин, а E — семейство двухэлементных подмножеств множества V , называемых рёбрами.

Оговорим, что мы будем работать с неориентированными графами без петель и кратных рёбер. То есть, два конца одного ребра «равноправны», ребро не может соединять вершину саму с собой, и две вершины соединены не более чем одним ребром. Заметьте, что в формальном определении всё это уже «зашиито».

Степенью вершины называется количество рёбер, выходящих из этой вершины.

1. Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу рёбер.
2. В любом графе количество вершин нечётной степени является чётным.

Назовём граф $G = (V, E)$ *полным*, если любые две вершины в нём соединены ребром, т. е. для любых $u, v \in V$ верно, что $\{u, v\} \in E$.

3. Количество рёбер в полном графе на n вершинах равно $\frac{n(n-1)}{2}$.

Маршрутом в графе называется последовательность вершин и рёбер, которая обладает следующими свойствами:

1. она начинается и заканчивается вершиной;
2. вершины и рёбра в ней чередуются;
3. любое ребро последовательности имеет своими концами две вершины: непосредственно предшествующую ему в этой последовательности и следующую сразу за ним.

Первая и последняя вершины в этой последовательности называются *началом* и *концом* маршрута.

Путём называется такой маршрут, в котором никакое ребро не встречается дважды. Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами существует маршрут. В противном случае граф называется несвязным.

Любой несвязный граф состоит из нескольких связных графов, каждый из которых называется *компонентной связности графа*. При этом каждое ребро графа лежит в одной из его компонент связности. У связного графа ровно одна компонента связности.

4. Граф на n вершинах, степень каждой из которых не менее $\frac{n-1}{2}$, связан.
5. Связный граф, в котором степень каждой вершины чётна, при удалении любого ребра остаётся связным.
6. Если из полного графа на n вершинах удалить не более $n - 2$ рёбер, то граф останется связным.
7. На плоскости нарисованы вершины графа, пронумерованные числами от 2 до 30. При этом две вершины с номерами a и b соединены ребром только в том случае, если одно из чисел a или b делится на другое. Сколько компонент связности имеет этот граф?

Как решается соответствующая задача на программирование, если число 30 в условии заменить на какое-нибудь другое?

8. Степень каждой вершины связного графа не менее 100. Одно ребро выкинули. Может ли получиться несвязный граф?

9. В некотором государстве города соединены дорогами. Длина любой дороги меньше 500 км, и из любого города в любой другой можно попасть, проехав по дорогам меньше 500 км. Когда одна дорога оказалась закрытой на ремонт, выяснилось, что из каждого города можно проехать по оставшимся дорогам в любой другой. Доказать, что при этом можно проехать меньше 1500 км.

10. Маша отдыхала в молодёжном лагере «Росинка», где вместе с ней находилось 45 школьников. После окончания отдыха 950 пар обменялись адресами. Через некоторое время Маше понадобился адрес Ирины, с которой она адресами не обменивалась. Докажите, что с помощью отдохавших в лагере Маша может найти адрес Ирины.

Замкнутый путь, т. е. такой, начало и конец которого совпадают, называется *циклом*.

Путь называется *простым*, если никакая вершина в нём не встречается дважды.

Цикл называется *простым*, если никакая вершина в нём кроме начальной и конечной не встречается дважды.

Деревом называется связный граф, не имеющий циклов.

Вершина графа называется *висячей*, если из неё выходит ровно одно ребро.

11. В любом дереве на $n \geq 2$ вершинах есть не менее двух висячих вершин.

12. Связный граф является деревом тогда и только тогда, когда число вершин в нём на одну больше числа рёбер.

13. Докажите, что из связного графа можно удалить несколько рёбер так, чтобы осталось дерево. Выведите отсюда, что в связном графе с циклами вершин не больше, чем рёбер.

14. В дереве есть 8 вершин степени три, 10 вершин степени 4 и несколько висячих вершин. Других вершин нет. Найти число висячих вершин.

15. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

16. У царя Гороха было 3 сына. У 50 его потомков было по 4 сына (и ни одной дочери), а прочие умерли бездетными. Сколько всего потомков было у царя Гороха?

17. В некотором городе на метро можно доехать от любой станции до любой другой (возможно, через другие станции). Докажите, что можно закрыть одну станцию (через неё нельзя будет ездить) так, чтобы от любой станции из оставшихся по-прежнему можно будет доехать до любой другой из оставшихся.

18. В некоторой стране любые два города соединены линией одной из двух авиакомпаний. Докажите, что одна из авиакомпаний может закрыться, и при этом по-прежнему можно будет долететь из любого города в любой другой (возможно, с пересадками).

Граф называется *планарным*, если его можно нарисовать на плоскости так, чтобы рёбра не пересекались нигде, кроме вершин.

Пусть дано изображение планарного графа на плоскости без пересечений рёбер. Обозначим буквой V число его вершин, буквой P — число рёбер, а буквой Γ — число *граней*, т. е. частей, на которые рёбра графа разбивают плоскость.

19. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

20. Докажите *формулу Эйлера* для связного графа на плоскости: $V - P + \Gamma = 2$.