

Основные понятия теории графов.

Граф, или **неориентированный граф** $G = (V, E)$ -- это упорядоченная пара $G = (V, E)$, где V это непустое множество **вершин**, а E — множество пар (в случае неориентированного графа — неупорядоченных) вершин, называемых **рёбрами**.

Неформально. Граф -- это множество вершин (точек) и множество ребер (линии), соединяющих между собой все или часть этих точек.

Петля -- ребро, концы которого совпадают.

Степень вершины ($\deg V$) -- количество инцидентных ей рёбер (при этом петли считают дважды).

Путь -- последовательность вида $v_0 e_1 v_1 \dots e_k v_k$, где $e_i \in E$, $e_i = (v_{i-1}, v_i)$, k — **длина** (англ. *length*) пути.

Простой путь -- путь, в котором каждая из вершин графа встречается не более одного раза.

Цикл — путь, в котором $v_0 = v_k$.

Простой цикл -- цикл, в котором каждая из вершин графа встречается не более одного раза.

Подграф исходного графа — граф, содержащий некоторое подмножество вершин данного графа и некоторое подмножество *инцидентных* им рёбер.

Компонента связности -- множество вершин графа такое, что для любых двух вершин из этого множества существует путь из одной в другую, и не существует пути из вершины этого множества в вершину не из этого множества.

Связный граф -- граф, содержащий ровно одну компоненту связности. Это означает, что между любой парой вершин этого **графа** существует как минимум один путь.

Несвязный граф -- граф, содержащий более одной компоненты связности.

Ориентированный граф -- граф, рёбрам которого ориентированы.

Неориентированный граф -- граф, рёбрам которого неориентированы.

Полустепень захода вершины — количество ребер, которые входят в вершину.

Полустепень исхода вершины -- количество ребер, которые выходят из вершины.

Исток — вершина, у которой нет входящих ребер.

Сток -- вершина, у которой нет исходящих ребер.

Ациклический граф — граф без циклов.

Полный граф -- граф, в котором между каждой парой различных вершин есть ребро.

Взвешенный граф -- граф, каждому ребру которого поставлено в соответствие некоторое значение (вес ребра)

Простой граф -- граф, в котором нет петель и кратных ребер.

Двудольный граф— граф, множество вершин которого можно разбить на две части таким образом, что каждое ребро графа соединяет какую-то вершину из одной части с какой-то вершиной другой части, то есть не существует ребра, соединяющего две вершины из одной и той же части.

Дерево -- связный ациклический граф.

Лес – множество деревьев.

Корень дерева – исток дерева.

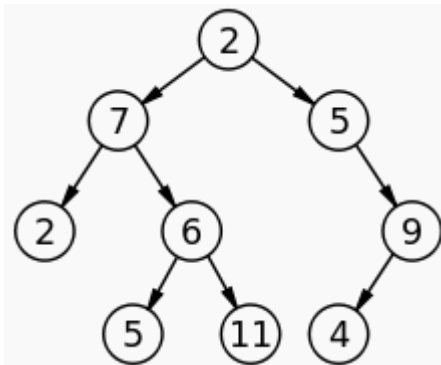
Лист – сток дерева.

Двоичное дерево –

Неориентированное дерево, в котором степени вершин не превосходят 3.

Ориентированное дерево, в котором исходящие степени вершин (число исходящих рёбер) не превосходят 2.

k-ичное дерево – граф, в котором степени всех вершин не превосходят k.



Простое бинарное дерево размера 9 и высоты 3, с корнем значения 2. Это дерево не сбалансировано и не отсортировано.

Висячая вершина -- вершина степени 1.

Утверждение. В любом дереве (более, чем с одной вершиной) есть хотя бы одна висячая вершина.

Доказательство. Возьмем любую вершину дерева и пойдем из нее куда-нибудь. Если мы пришли не в висячую вершину, то мы можем пойти дальше по другому ребру, которое там есть. А потом еще дальше и дальше. Так как в дереве нет циклов, то мы *никогда не попадем* в вершину, где уже были. Так как в графе *конечное число* разных вершин, то ходить до бесконечности мы *не можем*. Значит, мы вынуждены будем остановиться. Но это может быть, *только* если мы придем в *висячую вершину* - значит, она есть, ч.т.д.

Упражнение. Докажите, что в любом дереве, где не менее двух вершин, есть хотя бы две висячих вершины.

Упражнение. Докажите, что в любом дереве, где есть вершина степени d, есть хотя бы d висячих вершин.

Три определения дерева

- 1) Дерево - это связный граф, не имеющий циклов.
- 2) Дерево - это граф, в котором любые две вершины соединены ровно одним простым путем.
- 3) Дерево - это связный граф, теряющий связность после удаления любого ребра.

4) Конечный связный граф является деревом тогда и только тогда, когда $V - E = 1$, где V -- число вершин, E -- число рёбер графа.

- **Теорема.** Три данных определения дерева равносильны.

Лемма. (ценная сама по себе!) Если две вершины в графе соединены путем (т.е. лежат в одной компоненте связности), то между ними есть и простой путь.

Доказательство леммы. Пусть в графе между вершинами A и B есть путь, и он не простой. Тогда на этом пути повторяется какая-то вершина C . Сделаем *сокращение* пути: выкинем кусок между двумя заходами в вершину C . Если и сокращенный путь - не простой, то его можно еще раз сократить и т.д. Так как длина при каждом сокращении строго уменьшается, то за конечное число операций мы получим простой путь, ч.т.д.

Следствие. (из леммы) В связном графе между любыми двумя вершинами есть хотя бы один простой путь

Доказательство. Докажем равносильность в таком порядке: из 1.) следует 2.), из 2.) - 3.), а из 3.) следует 1.)

Пусть связный граф не имеет циклов, но в нем есть две вершины A и B , между которыми простой путь - не один. Так как, по следствию из леммы, хотя бы один простой путь есть, то их *хотя бы два*. Хитрость тут в том, что эти два пути могут пересекаться, и, пройдя по одному пути от A до B и вернувшись по второму в A , мы можем *не получить цикл*. Тогда возьмем вершину C , после которой два пути первый раз *расходятся*, и пойдем из нее по первому пути до вершины D - *следующей* точки *пересечения* путей (может быть $C=A$ или $D=B$). А потом вернемся из D в C по второму пути. Это действительно будет цикл, так как кусок первого пути от C до D вообще не пересекается со вторым путем?! ч.т.д.

Теперь пусть в графе любые две вершины соединяет ровно один простой путь, но есть такое ребро (с концами A и B , при удалении которого связность сохраняется. В исходном графе был простой путь от A до B из одного ребра AB - и он был единственным. Но в графе с удаленным ребром AB (так как он связный), есть путь между A и B , а значит, и простой путь (см. лемму). Но тогда он был вторым простым путем в исходном графе?! ч.т.д.

Наконец, пусть связный граф теряет связность при удалении любого ребра, но в нем есть цикл. Возьмем в цикле две соседние вершины, A и B . Удалим ребро AB и попробуем пройти из произвольной вершины C в произвольную вершину D . Если был путь, не содержащий ребра AB , то он сохранился. Если же путь из C в D содержал ребро AB , то мы, вместо этого ребра, будем проходить из A в B по всему остальному циклу. Все равно, из C в D можно пройти, то есть граф остался связным?! ч.т.д.

Определение 4

Доказательство. Докажем сначала, что в дереве ребер на одно меньше, чем вершин, причем по индукции. Сформулируем это утверждение так: "в дереве с n вершинами $n-1$ ребро" и проведем индукцию по n .

База: $n=1$. Очевидно, что ребер будет 0.

Переход: От n к $n+1$. Возьмем дерево с $n+1$ вершиной, найдем в нем висячую вершину (она есть - см. выше) и удалим ее вместе с выходящим из нее единственным ребром. То что останется, будет деревом, уже с n вершинами. По предположению индукции, в нем $n-1$ ребро, поэтому в исходном дереве n ребер ч.т.д.

Обратное утверждение докажем тоже индукцией по n , сформулировав его так: "связный граф с n вершинами и $n-1$ ребром является деревом".

База: $n=1$. Очевидно, что граф из 1-й вершины без ребер - дерево.

Переход: От n к $n+1$. Возьмем граф с $n+1$ вершиной и n ребрами. Заметим, что в нем *есть висячая вершина*: иначе степени всех вершин не меньше 2, и число ребер (согласно утверждению из лекции "Графы-1") не меньше $2 \cdot (n+1)/2 = n+1$, а их n штук?! Теперь возьмем висячую вершину и выкинем вместе с ее единственным ребром. Граф *останется связным*, в нем будет уже n вершин и $n-1$ ребро, поэтому он будет деревом по предположению индукции. А когда мы приделаем висячую вершину обратно, он останется деревом ч.т.д.

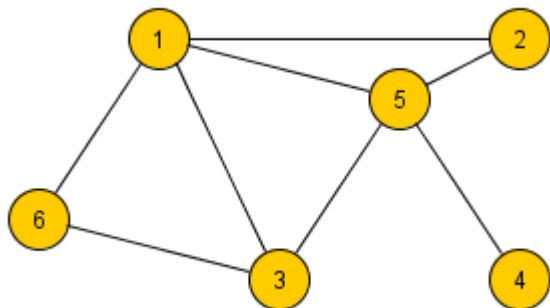
Лемма о рукопожатиях

Сумма степеней всех вершин графа без петель — четное число, равное удвоенному числу ребер:

$$\sum_{v \in V(G)} \deg v = 2|E(G)|$$

Доказательство. Возьмем пустой граф. Сумма степеней вершин такого графа равна нулю. При добавлении ребра, связывающего любые две вершины, сумма всех степеней увеличивается на 2 единицы. Таким образом, сумма всех степеней вершин четна и равна удвоенному числу ребер.

Например, для следующего графа выполнено: $\deg(1) + \dots + \deg(6) = 16 = 2|E|$



Следствие 1. В любом графе число вершин нечетной степени четно.

Следствие 2. Число ребер в полном графе $\frac{n(n-1)}{2}$.

- **Задача 1. Граф отношения делимости.** Построим граф, изображающий отношение делимости на множестве $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Принцип такой: если от одного числа до другого есть цепь, ведущая вверх, тогда второе число делится на первое
- **Задача 2.** Докажите, что не существует графа с 5-ю вершинами, имеющими степени 4, 4, 4, 4, 2.

Решение: Теорема о четности числа нечетных вершин (см. лекцию "Графы-1") нам не поможет. Давайте тогда анализировать структуру графа (пусть он все-таки есть). Если вершин 5, то вершина степени 4 - соседняя со всеми остальными. Таких вершин у нас 4 штуки, поэтому 5-я вершина должна быть *соседней с ними всеми*. Но у нее степень 2, то есть только 2 соседа?! ч.т.д.

- **Теорема Эйлера.** В любом связном плоском графе $V-E+K=2$.

Доказательство. Докажем *индукционным спуском* по числу ребер, довольно необычно устроенным.

База: Пусть граф - *дерево*. Тогда $E=V-1$ (это у нас было 4-е определение дерева), а $K=1$ (граница любой страны является циклом, а циклов нет, поэтому страна только одна). Значит, $V-E+K=V-(V-1)+1=2$, ч.т.д.

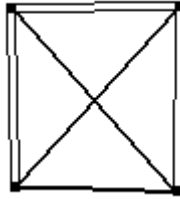
Переход: (в форме спуска). Если граф не дерево, то давайте строить его *остовное дерево*. Для этого мы несколько раз удаляем ребро из какого-то цикла. Каждый раз E уменьшается на 1. А K тоже уменьшается на 1, поскольку объединяются две страны, граничившие по этому ребру. Именно за счет того, что ребро лежит в цикле, не может быть так, что по обе его стороны была одна и та же страна (!). Значение $V-E+K$ *не поменялось*. Значит, у исходного графа оно такое же, как у остовного дерева. А там получается $V-E+K=2$, ч.т.д.

- **Задача 5.** В стране любые два города соединены либо железной дорогой, либо авиалинией. В связи с террористической угрозой, президент решил временно закрыть один из видов транспорта. Докажите, что он может сделать это так, чтобы из любого города можно было проехать в любой.

Решение: Рассмотрим граф из одних авиалиний. Если он связный, то железные дороги можно закрывать. Если нет - любые два города из разных компонент связности соединены железной дорогой. В этом случае можно закрыть авиалинии. Действительно, из любого города в город из другой компоненты связности можно доехать по железной дороге напрямик. А в город из той же компоненты - с одной пересадкой, в любом городе, не входящем в эту компоненту (а чтобы он был, компонент должно быть хотя бы две!), ч.т.д.

- **Задача 6.** Верно ли, что в задаче 5 можно закрыть один вид транспорта так, что из любого города в любой можно добраться не более, чем с одной пересадкой (будем называть это "хорошо доехать")? А хотя бы из столицы в любой город?

Решение: Из любого в любой, оказывается, нельзя. Простейший контрпример, всего с 4-мя городами - см. рис.



- А из столицы хорошо доехать до любого города на одном виде транспорта можно. Доказывается это от противного, причем совершенно типичным для теории графов рассуждением. Пусть нельзя: тогда есть какой-то город А, куда *нельзя* хорошо доехать от столицы *по железной дороге* и какой-то город В, куда *нельзя* хорошо долететь *по авиалиниям*. Обозначим столицу за С и рассмотрим дороги, соединяющие эти три города. Ясно, что АС - авиалиния, а ВС - железная дорога. Но есть еще дорога между А и В! Если она *железная*, то в А *можно* хорошо доехать по железной дороге через В, а если авиалиния - наоборот, в В *можно* хорошо долететь через А. В любом случае, противоречие, ч.т.д.
Упражнение. Докажите (аналогичным рассуждением от противного), что можно все-таки закрыть один транспорт так, чтобы из любого города в любой можно было доехать не более, чем с двумя пересадками.
- **Задача 7.** Докажите, что среди любых 6 человек есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.
Решение: Рассмотрим произвольного человека: у него среди остальных пяти - не меньше трех знакомых (или не меньше трех незнакомых - случай аналогичен). Если среди этих троих какие-то двое знакомы друг с другом - они вместе с ним образуют тройку знакомых. А если нет - эти трое попарно незнакомы, ч.т.д.
Упражнение. Среди 17 человек любые двое - друзья, враги или незнакомые. Докажите, что есть либо трое друзей, либо трое врагов, либо трое незнакомых (попарно). Воспользуйтесь предыдущей задачей!