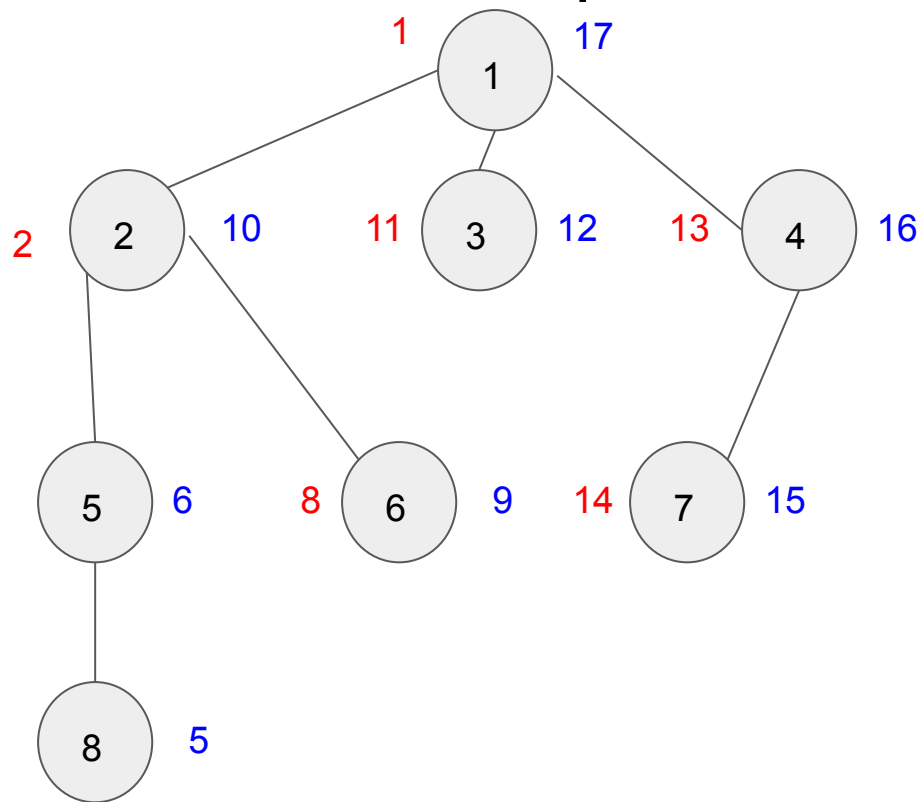


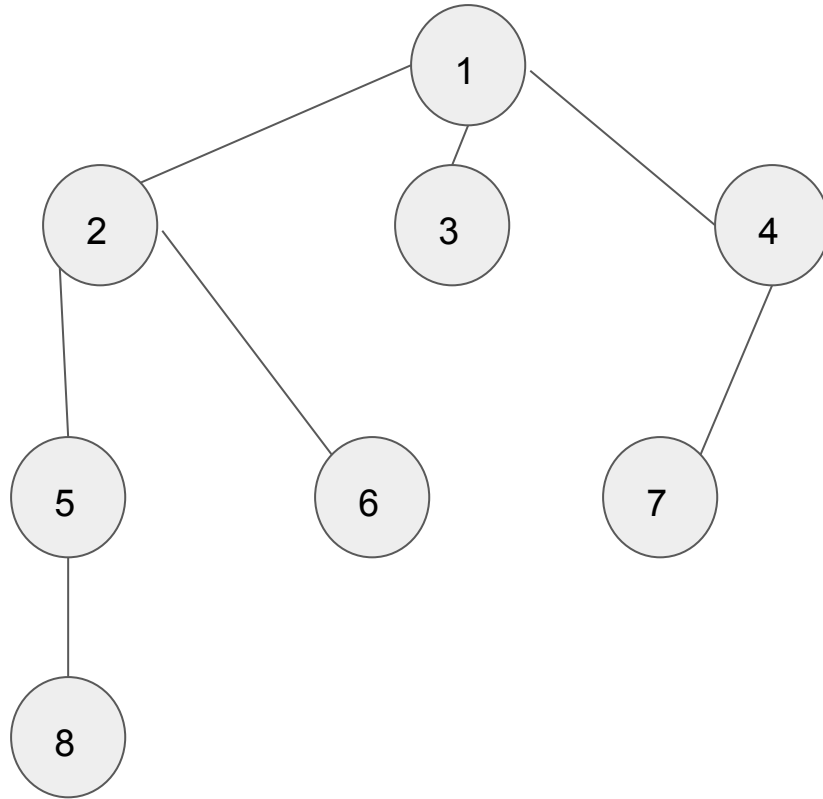
LCA

Преподаватель
Макоян Артем Каренович

Время входа и выхода



LCA



$$\text{lca}(6, 8) = 2$$

$$\text{lca}(5, 7) = 1$$

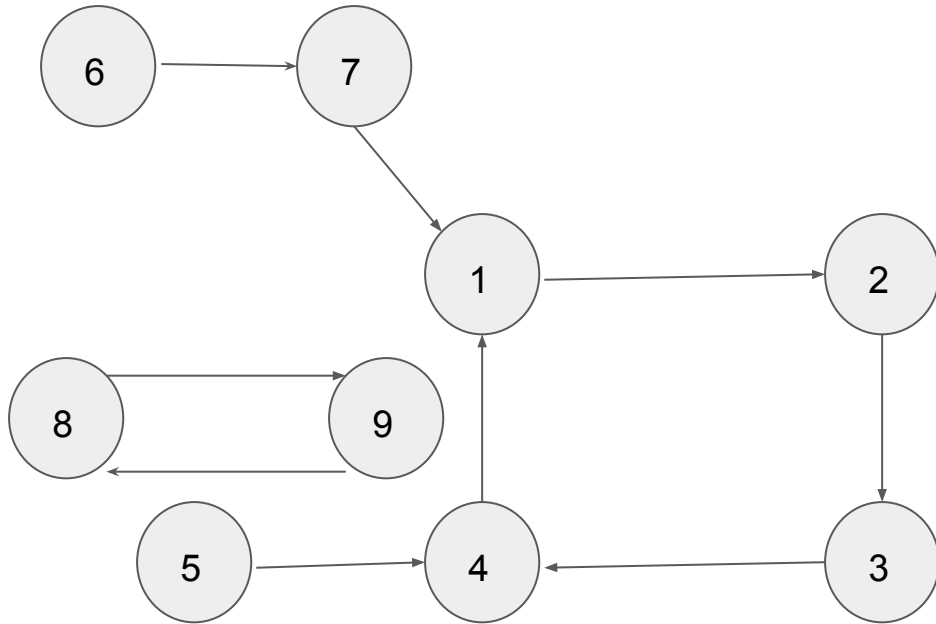
$$\text{lca}(2, 7) = 1$$

$$\text{lca}(2, 6) = 2$$

$$\text{lca}(8, 2) = 2$$

$$\text{lca}(3, 8) = 1$$

Бинарные подъемы



$go(v, c)$ = где мы окажемся, если
пройдем из v на c ходов

$$go(6, 1) = 7$$

$$go(6, 4) = 3$$

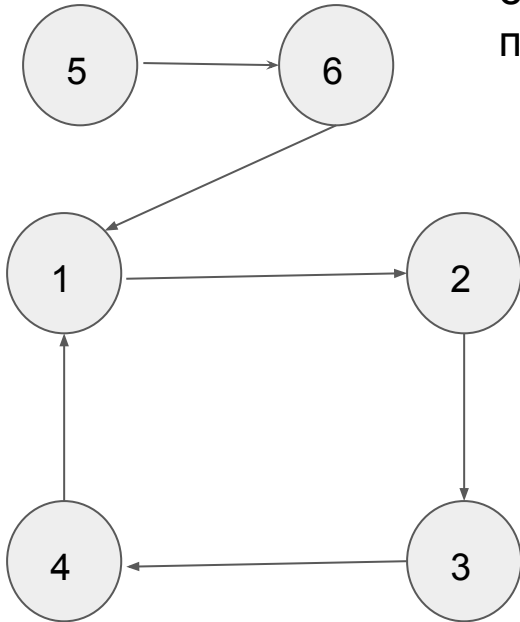
$$go(8, 2) = 8$$

$$go(9, 100) = 9$$

$$go(5, 301) = 4$$

Бинарные подъемы

Посчитаем все $go(v, 2^c)$. Воспользуемся динамикой. База: $c = 0 \rightarrow 1$ строка таблицы это переход по одной стрелке
Чтобы пройти 2^c вперед - пройдем сначала $2^{(c-1)}$, а потом еще раз $2^{(c-1)} \Rightarrow go(v, 2^c) = go(go(v, 2^{(c-1)}), 2^{(c-1)})$ - пересчитываем через предыдущую строку

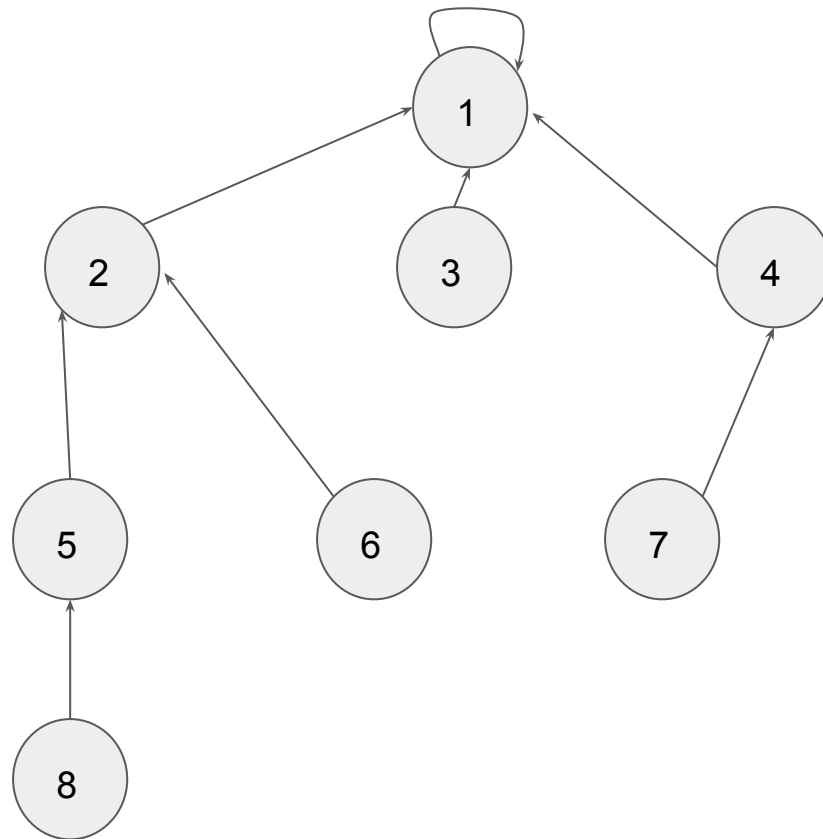


c\v	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	1	6	1
2	3	4	1	2	1	2
4	1	2	3	4	3	4
8	1	2	3	4	3	4
16	1	2	3	4	3	4

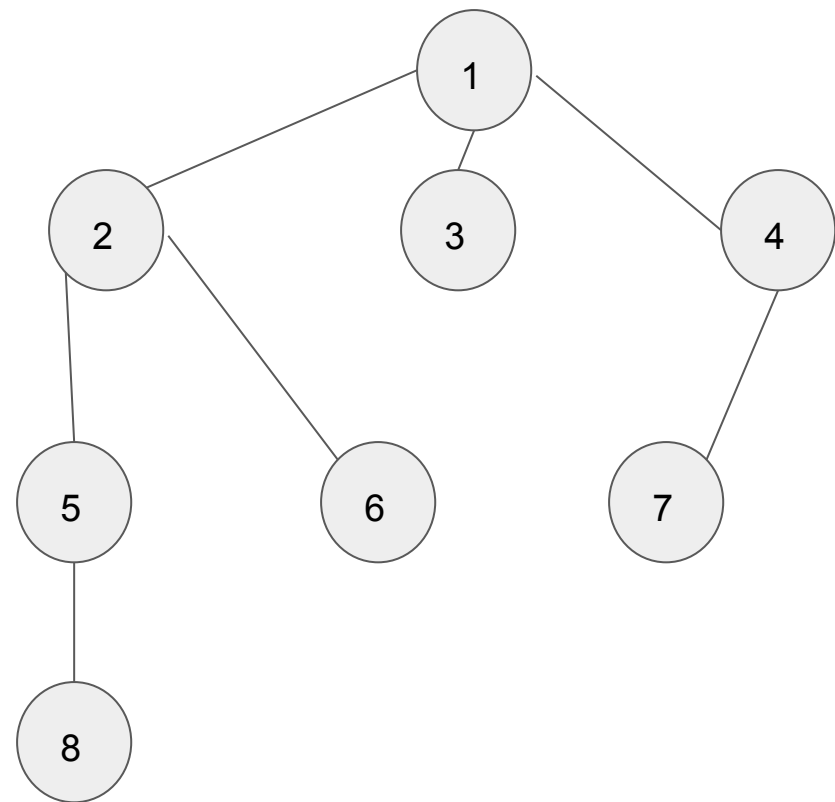
$go(v, k) = go(go \dots go(v, 2^{c_1}), 2^{c_2}) \dots 2^{c_m}$, где $k = 2^{c_1} + 2^{c_2} + \dots + 2^{c_m}$

То есть вместо того, чтобы прыгнуть на k , мы сначала прыгаем на 2^{c_1} , потом на $2^{c_2} \dots$ потом на 2^{c_m}

Бинарные подъемы и LCA



Эйлеров обход дерева



Эйлеров обход дерева:

1->2->5->8->5->2->6->2->1->3->1->4->7->4->1

$\text{first}[u]$ - первое вхождение вершины u в массив эйлерова обхода

- Все вершины от $\text{first}[u]$ до $\text{first}[v]$ лежат в поддереве $\text{lca}(u, v)$
- $\text{lca}(u, v)$ встречается на отрезке от $\text{first}[u]$ до $\text{first}[v]$

Тогда $\text{lca}(u, v)$ - вершина с минимальной высотой на отрезке от $\text{first}[u]$ до $\text{first}[v]$

Фарах-Колтон и Бендер

- С помощью Эйлера сводим lca к задаче RMQ, где каждые 2 соседних элемента отличаются на ± 1
- Разобьем массив на блоки по $K = \frac{1}{2} \log N$ и предподсчитаем минимум в каждом блоке и построим sparse table на блоках за $N / K * \log (N / K) = O(N)$, так как $K = \frac{1}{2} \log N$
- При запросе “min l, r”, с помощью sparse table можем найти минимум из из всех блоков **полностью** входящих в $[l, r]$
- Осталось научиться считать минимум в “куске” блока
- Если из всех элементов блока вычесть первый элемент, то блок будет характеризоваться последовательностью 1 и -1 длины $k - 1$ (при вычитании индекса минимума не меняется)
- Тогда переберем всевозможные блоки и подотрезки внутри них и предподсчитаем в них минимум - $O(2^{(K-1)} * K^3) = O(\sqrt{N} * \log^3 N)$

Сравнение результатов

LCA	Бинарные подъемы	Эйлеров обход. ДО.	Эйлеров обход. Разреженные таблицы.	Фарах-Колтон и Бендер
Построение:	$O(n \log n)$	$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$
На запрос:	$O(\log n)$	$O(\log n)$	$O(1)$	$O(1)$
Память:	$O(n \log n)$	$O(n)$	$O(n \log n)$	$O(n)$