

Вычислительная геометрия

ЛШКН 2020, параллель В
Прохоров Михаил
tg: @Aphanasiy

Притча

Существует три способа решения геометрии

- 1) Московский - узнаем, что такое точка, вектор и прямая и будем решать все задачи, используя эти знания
- 2) Питерский - зазубрим все формулы, известные нашему тренеру и будем молиться, что они нам попались на олимпиаде
- 3) Саратовский - Фу, ёкарный бабай, это геома... Фу... Фу... Выкинь её сразу, блин, я не буду это решать...

Притча 2

Все дороги ведут в Рим Москву

Тест. Задача Фрекен Бок

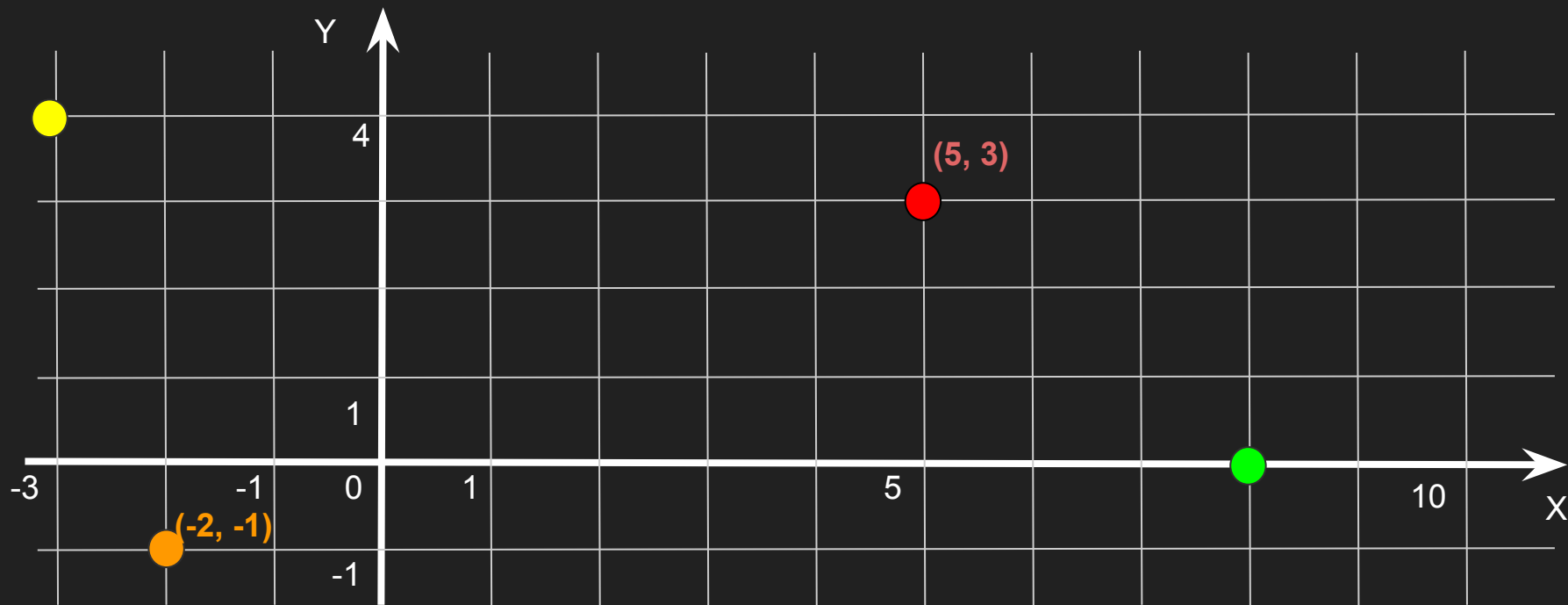
Дано три точки - Малыш, Карлсон и Фрекен Бок

Фрекен-бок смотрит на Малыша, а Карлсон летает где-то рядом и жужжит

В каком ухе жужжит больше?

Если вы умеете решать эту задачу, то можете пойти себе налить ещё чая

Точка



Расстояние между точками

Применяем Теорему Пифагора!

$$A^2 + B^2 = C^2$$

$$(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 = \text{DIST}(P_1, P_2)$$

Притча 3

Если точки нельзя соединить -
грош цена таким точкам



J. Statham

Доктор геометрических наук

Эксперт в области графических эффектов

Как соединить точки?

Отрезок

Отрезок - это две точки. Длина отрезка - это расстояние между ними

Вектор

Вектор - это “направление”. Иными словами, стрелочка с соответствующими длинами по координатам x , y , не привязанная ни к какой конкретной точке.

Вычисляется, как разность координат между какими-то точками

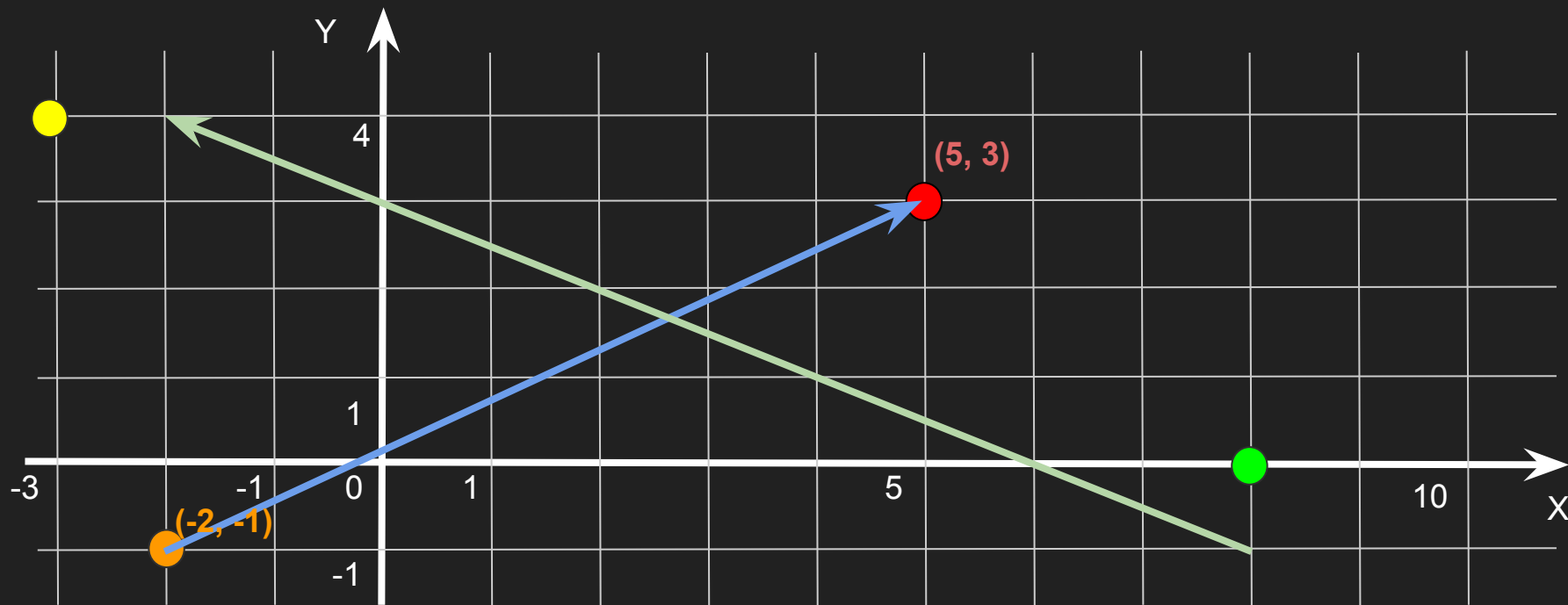
Направленный отрезок

Точка + Вектор. Вторая точка вычисляется суммированием соответствующих координат.

$$X_v = X_2 - X_1 \quad | \quad Y_v = Y_2 - Y_1$$

Вектор

Найдите синий и зелёный вектор



Скалярное произведение

Скалярное произведение двух векторов вычисляется как $|a| * |b| * \cos(a, b)$

$$|a| * |b| * \cos(a, b) = |(a_x + a_y)| * |(b_x + b_y)| * \cos(a, b) =$$

$$= |a_x * b_x| * \cos(a_x, b_x) + |a_x * b_y| * \cos(a_x, b_y) + |a_y * b_x| * \cos(a_y, b_x) + |a_y * b_y| * \cos(a_y, b_y) =$$

$$= |a_x * b_x| * 1 + |a_x * b_y| * 0 + |a_y * b_x| * 0 + |a_y * b_y| * 1 = a_x * b_x + a_y * b_y$$

$$|a| * |b| * \cos(a, b) = a_x * b_x + a_y * b_y$$

Если **a** и **b** перпендикулярны (угол между векторами - 90),
то скалярное произведение равно нулю

Определяется в тексте, как “**(a, b)**”

Векторное произведение

Векторное произведение двух векторов вычисляется как $|a| * |b| * \sin(a, b)$

$$|a| * |b| * \sin(a, b) = |(a_x + a_y)| * |(b_x + b_y)| * \sin(a, b) =$$

$$= |a_x * b_x| * \sin(a_x, b_x) + |a_x * b_y| * \sin(a_x, b_y) + |a_y * b_x| * \sin(a_y, b_x) + |a_y * b_y| * \sin(a_y, b_y) =$$

$$= |a_x * b_x| * 0 + |a_x * b_y| * 1 + |a_y * b_x| * (-1) + |a_y * b_y| * 0 = a_x * b_y - a_y * b_x$$

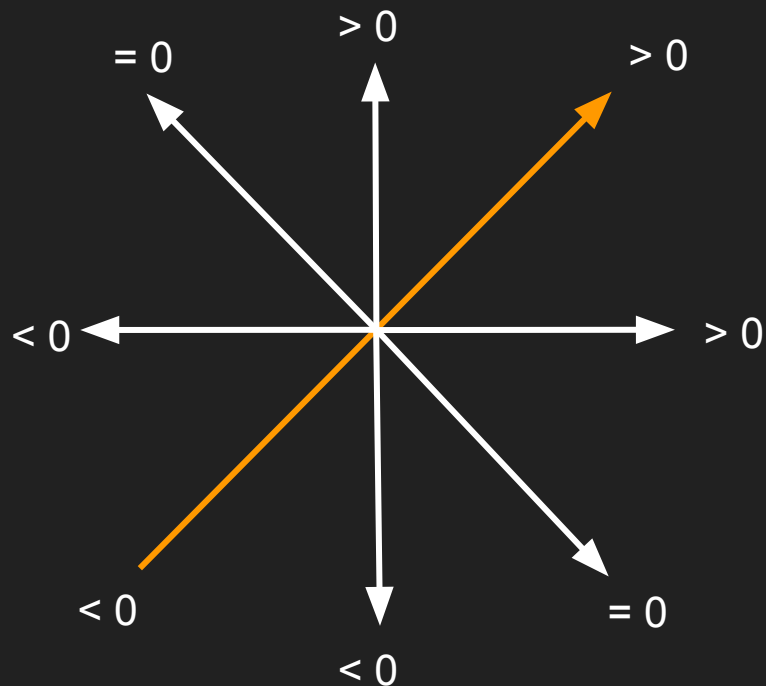
$$|a| * |b| * \sin(a, b) = a_x * b_y - a_y * b_x$$

Если a и b сонаправлены (коллинеарны, угол между векторами - 0),
то векторное произведение равно нулю

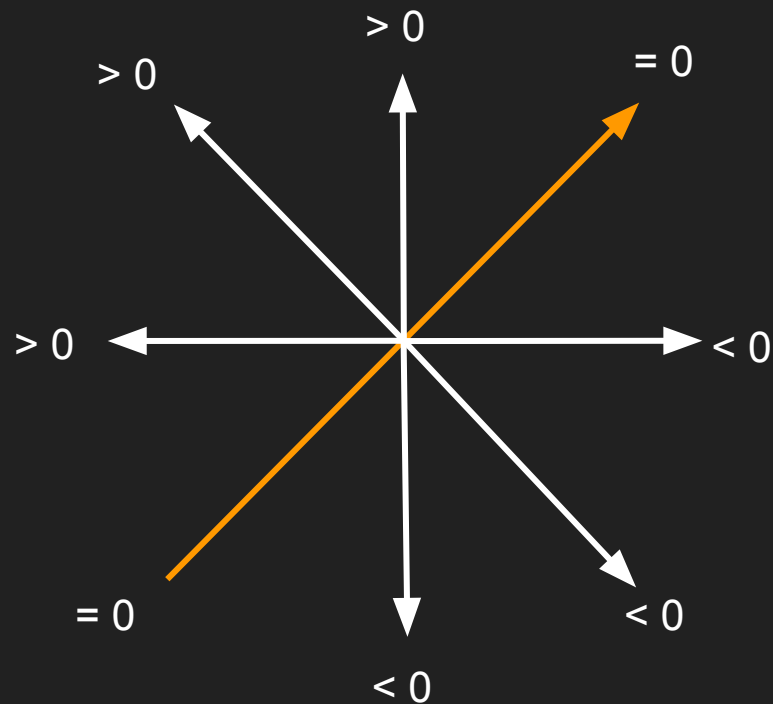
Определяется в тексте, как “[a, b]”

А ещё половина векторного произведения - это площадь треугольника, образованного векторами
 $\sin(a, b)$ - это синус угла от первого вектора ко второму против часовой стрелки

Геометрический смысл произведений



Скалярное произведение



Векторное произведение

Угол между векторами

- ~~X~~ $\text{asin}([a, b])$
- ~~X~~ $\text{acos}(a, b)$
- ~~X~~ $\text{atan}([a, b] / (a, b)) = \text{atan}(\sin(a, b) / \cos(a, b))$
- ~~V~~ $\text{atan2}([a, b], (a, b))$

Поворот на угол

$$x = r \cos(a)$$

$$y = r \sin(a)$$

~ ~ ~ синус суммы, косинус суммы ~ ~ ~

$$x' = r \sin(a + b) = r \cos(a) \sin(b) + r \sin(a) \cos(b) = x \sin(b) + y \cos(b)$$

$$y' = r \cos(a + b) = r \cos(a) \cos(b) - r \sin(a) \sin(b) = x \cos(b) - y \sin(b)$$

Прямая

- Классическое уравнение $Ax + By + C = 0$

$$A = P_2y - P_1y; \quad B = P_2x - P_1x; \quad -C = Ax + By$$

- По двум точкам
- По точке и вектору

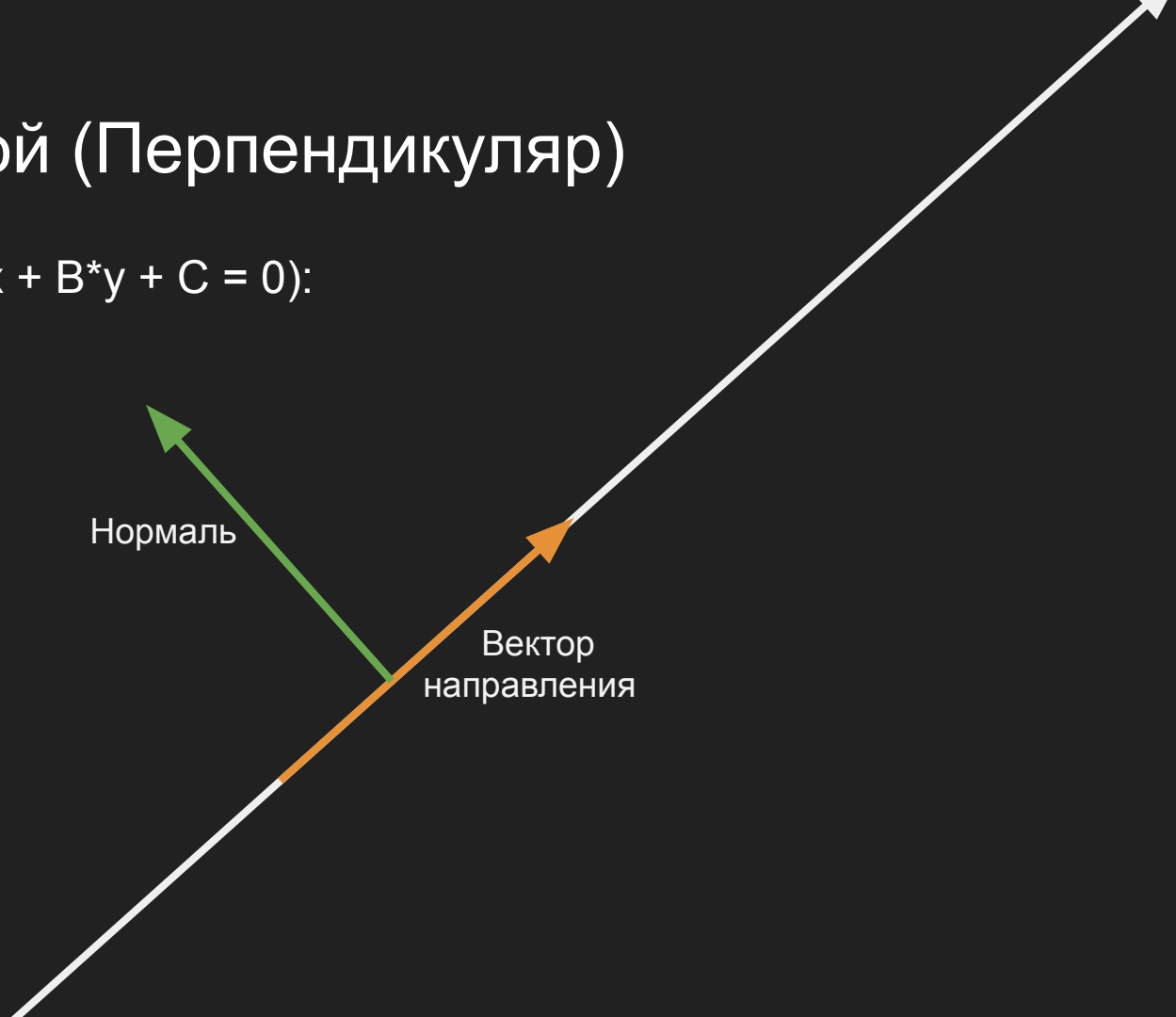
Нормаль к прямой (Перпендикуляр)

Классический вариант ($A \cdot x + B \cdot y + C = 0$):

– (A, B)

Вектор + Точка:

– $(-B_v, A_v)$

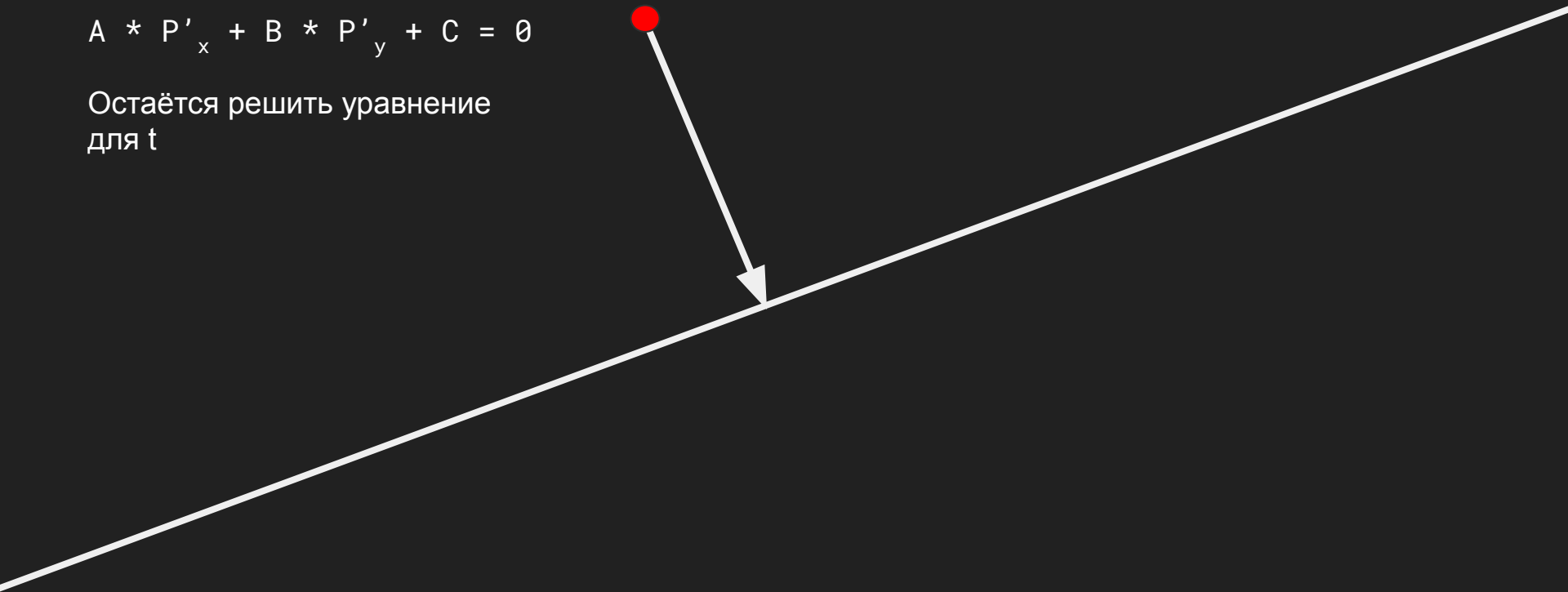


Расстояние от точки до прямой

$$P' = (n_x * t + P_x, n_y * t + P_y)$$

$$A * P'_x + B * P'_y + C = 0$$

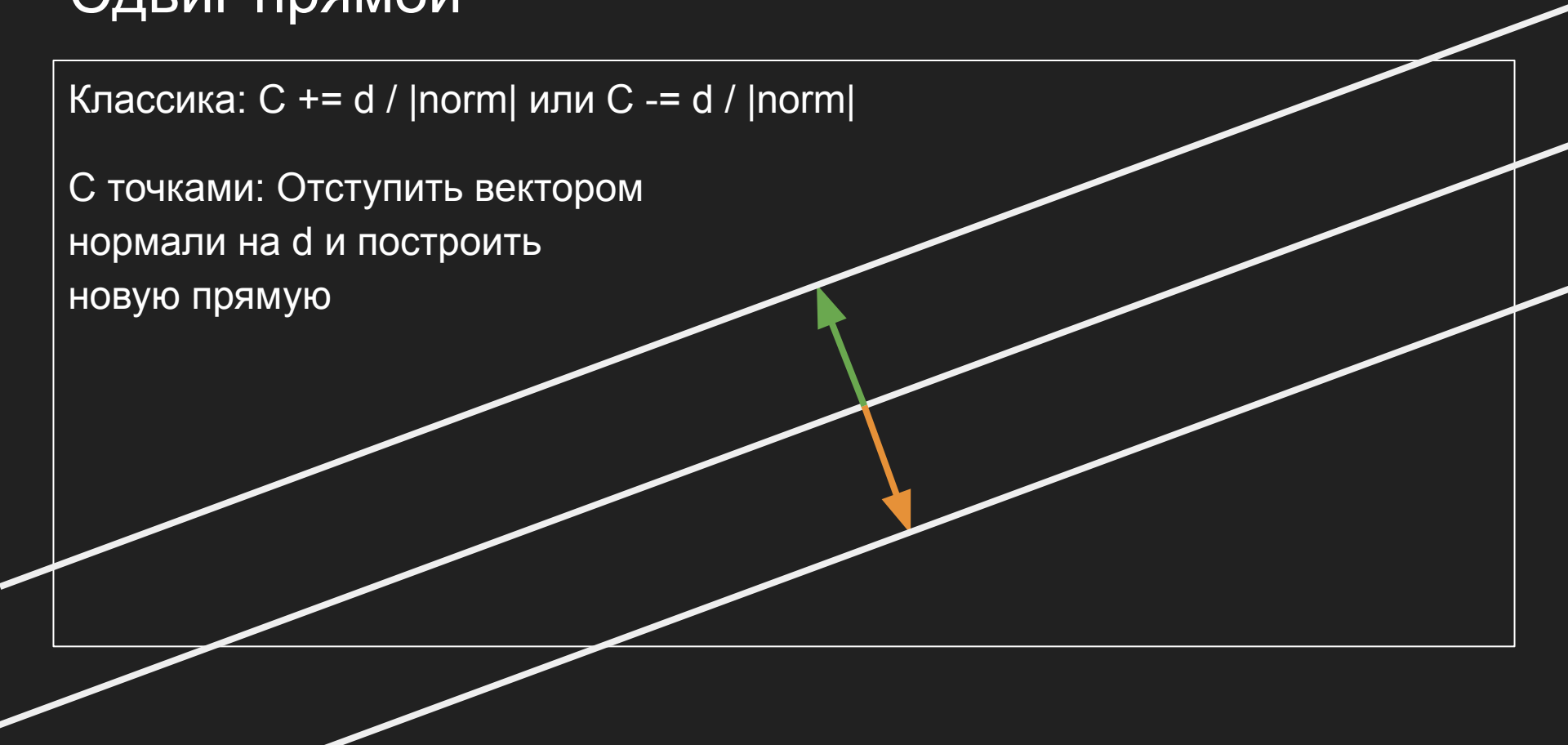
Остаётся решить уравнение
для t



Сдвиг прямой

Классика: $C += d / |norm|$ или $C -= d / |norm|$

С точками: Отступить вектором нормали на d и построить новую прямую



Пересечение прямых

Классика:

Решаем уравнение

$$| A1 * x + B1 * y + C = 0$$

$$| A2 * x + B2 * y + C = 0$$

Параметрически:

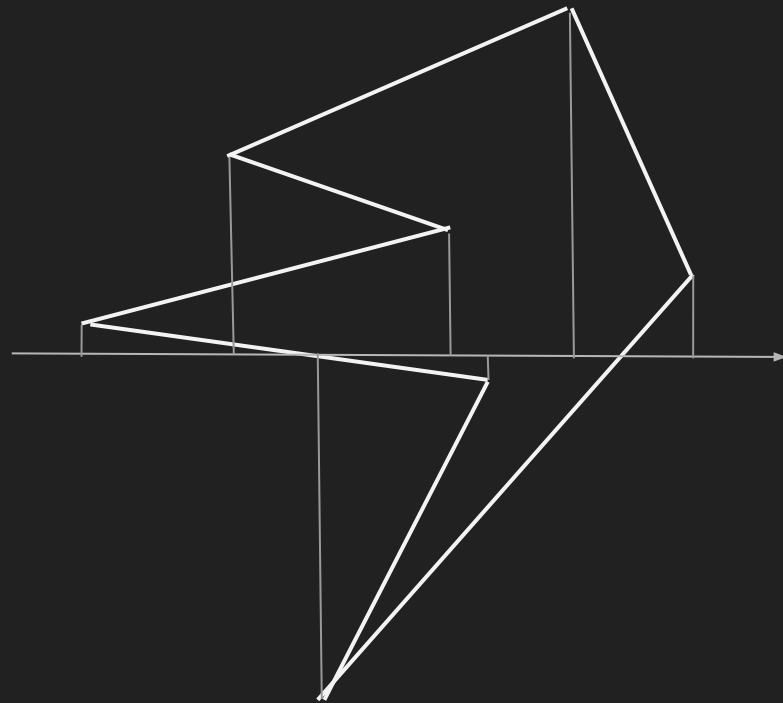
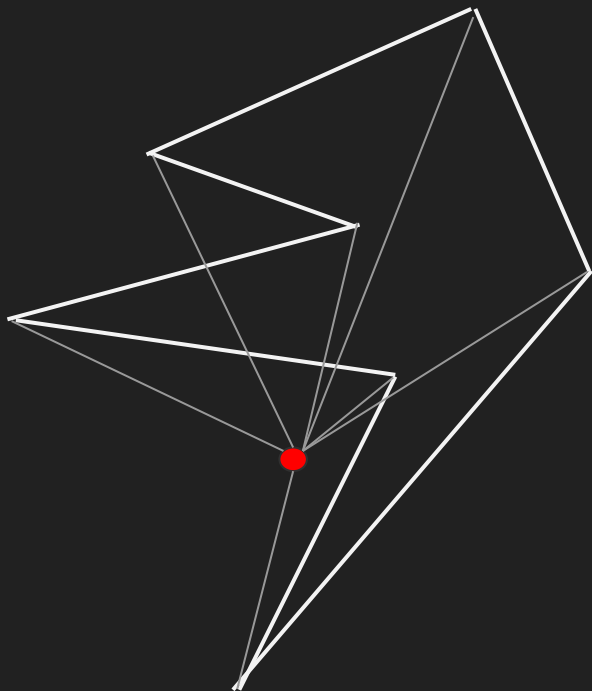
Решаем уравнение

$$| P1.x + B1 * t1 = P2.x + B2 * t2$$

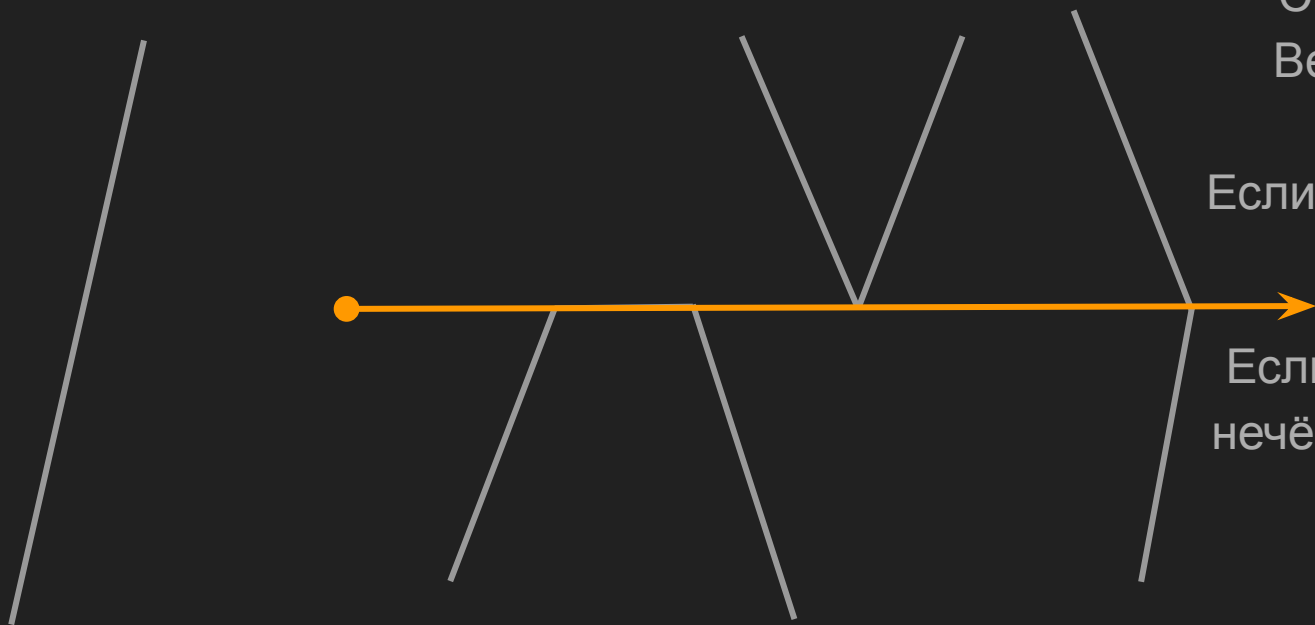
$$| P1.y + A1 * t1 = P2.y + A2 * t2$$

Решение этих упражнений - упражнение для читателя

Площадь многоугольника



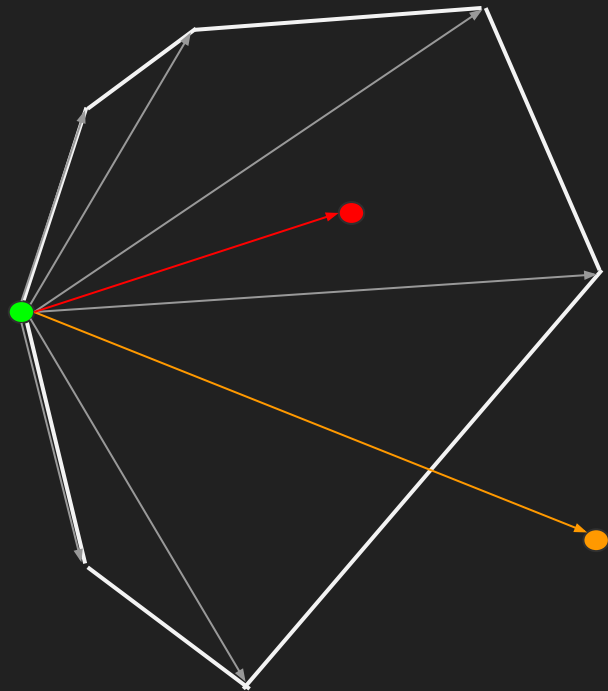
Нахождение точки в любом многоугольнике



Снова полуинтервалы!
Верх не включительно,
низ включительно
Если лежит на луче, то не
учитываем

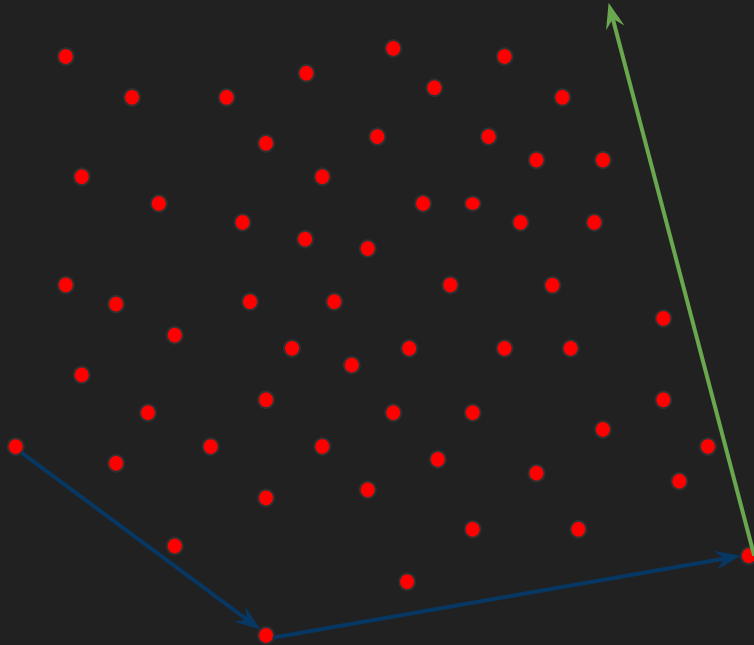
Если сумма пересечений
нечётная, то точка внутри

Нахождение точки в выпуклом многоугольнике



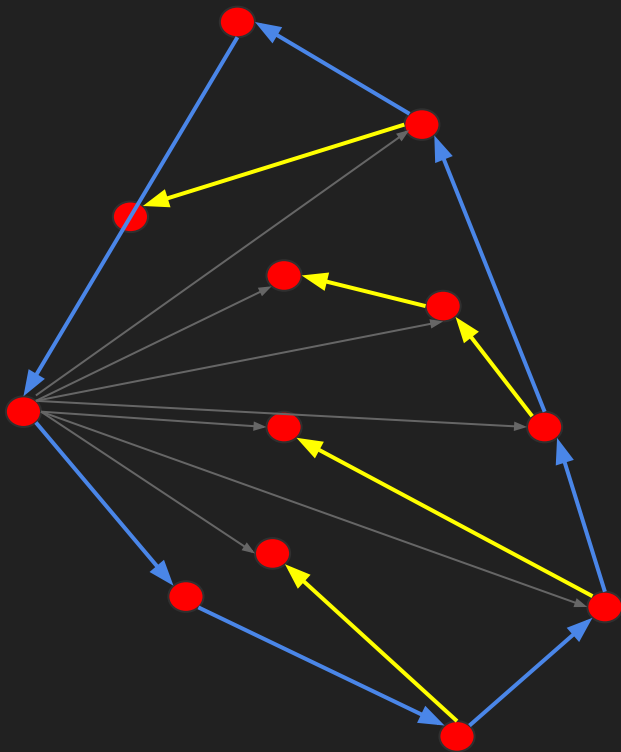
Ищем бинпоиском, в каком секторе лежит точка. Далее проверяем, что точка лежит в том треугольнике, который образуется сектором и другим краем многоугольника

Выпуклая оболочка методом заворачивания подарка (Джарвис)



Асимптотика: $O(N * k)$

Алгоритм Грэхема



Сортируем точки по полярному углу от самой левой нижней.

Сравнение по полярному углу происходит при помощи векторного произведения

Дальше обходим точки в порядке сортировки. Если в какой-то момент повернули слишком сильно, убираем лишние грани. Проверка на “слишком сильный заворот” происходит векторным произведением (другой знак)

Что мы опустили:

- 1) Касательная к окружности
- 2) Пересечение прямой и окружности
- 3) Пересечение окружностей

Кодинг тайм!

Переносимся в sublime...

Примеры задач:

- 1) Положение двух отрезков (пересекаются / не пересекаются)
- 2) Где находится точка относительно треугольника (внутри/снаружи/на границе)
- 3) Пересекаются ли отрезок и горизонтальный луч?